水泵性能曲线的正交多项式拟合

周龙才，丘传忻
(武汉大学水利水电学院)

摘 要：采用不规则点的正交多项式来拟合水泵性能曲线，可避免采用一般多项式拟合时可能出现病态方程组的弊端。文中采用Forsythe递推法生成正交多项式，根据显著性检验来确定拟合的多项式次数，并在计算中佐以作图程序来进行直观分析。文中还结合具体的算例证明了这种方法的实用性。

关键词：水泵，性能曲线，正交多项式，拟合
文献标识码：A **文章编号**：1005-6254(2001)04-0008-04
TH3

1 引言

水泵性能曲线一般是用图表或曲线图给出，但在水泵选型或泵站经济运行中，常常有必要知道水泵性能曲线的函数表达式。对此，可以根据试验数据或性能图上的数据进行拟合。目前，在水泵性能曲线拟合中较常用的一般多项式(文献[1]中还提出对某些离心泵的流量指数式)的最小二乘拟合，需要求解一非线性方程组，增加了数据存贮量，而且在多项式次数较高时方程容易出现病态。如果采用正交多项式，则对 n 组数据，可以一直拟合到 $n-1$ 次多项式而结果仍然稳定，因此在文献[2]中也曾提出对离心泵性能曲线的等流量间距的正交多项式回归法。本文将不规则点的正交多项式应用于水泵性能曲线的拟合，开发了可以对各种叶片泵的性能曲线进行拟合的计算程序，并通过绘图程序对计算的准确性进行了直观检验。

2 正交多项式拟合

2.1 正交多项式拟合原理

对单一自变量 x 及应变量 y 的 n 组数据 $(x_i, y_i)(i=1,\cdots,n)$，设采用如下的正交多项式来拟合：

$$P_m(x)=a_0\cdot p_0(x)+a_1\cdot p_1(x)+\cdots+a_m\cdot p_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k\cdot p_k(x) \tag{1}$$

式中 m—— 拟合的多项式次数 $(m\leqslant n-1)$

a_k—— 拟合系数 $(k=0,1,\cdots,m)$

$p_k(x)$—— 正交多项式系中的第 k 次生成的多项式，次数为 k

根据最小二乘原理，将数据 (x_i,y_i) 代入式(1)，应有剩余平方和最小：

$$\min L=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{m}a_k\cdot p_k(x_i)-y_i\Big]^2 \tag{2}$$

将式(2)对 a_j 求导并令其为零，则有

$$\sum_{i=1}^{n}p_j(x_i)\cdot y_i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}a_k\cdot p_k(x_i)\cdot p_j(x_i)\qquad (j=0,1,\cdots,m) \tag{3}$$

设 $p_k(x)$ 是在 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上的正交多项式系，有

$$\sum_{i=1}^{n}p_j(x_i)\cdot p_k(x_i)=0\qquad (j\neq k;\ j,k=0,1,2,\cdots,m) \tag{4}$$

第一作者简介：周龙才(1972.9—)，男，武汉大学水利水电学院水利系泵及泵站教研室 讲师，博士生；湖北省武汉市(430072)。

则式(2)得

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} p_j(x_i)\cdot y_i / \sum_{i=1}^{n} p_j^2(x_i) = C_j/C_{jj} \qquad (j = 0,1,2,\cdots,m) \tag{5}$$

自变量 x 可以根据水泵性能试验数据或水泵性能图上的数据取为水泵流量 Q,应变量 y 依次取相应的水泵扬程 H、轴功率 N、效率 η,由此来拟合水泵的 $H\sim Q$、$N\sim Q$、$\eta\sim Q$ 曲线。

2.2 正交多项式的生成

在自变量不是等间距时,需要采用不规则点的正交多项式 $p_k(x)$。这种多项式不能象规则点多项式那样有现成的多项式表,具体计算时要按一定的方法生成正交多项式系。不规则点的正交多项式有多种,同一种也有几种生成方法。在此可以采用常用的 Forsythe 递推法,这种方法很适合于计算机计算。其公式如下:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = (x - A_1)\cdot p_0(x) \\ \cdots\cdots \\ p_k(x) = (x - A_k)\cdot p_{k-1}(x) - B_{k-1}\cdot p_{k-2}(x) \qquad (k = 2,3,\cdots m) \end{cases} \tag{6}$$

式中
$$\begin{cases} A_k = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p_{k-1}^2(x_i) / \sum_{i=1}^{n} p_{k-1}^2(x_i) = C_1/C_{k-1,k-1} \\ B_{k-1} = \sum_{i=1}^{n} p_{k-1}^2(x_i) / \sum_{i=1}^{n} p_{k-2}^2(x_i) = C_{k-1,k-1}/C_{k-2,k-2} \end{cases} \tag{7}$$

由式(6) 和式(7) 也可以看出 $p_k(x)$ 是最高次系数为 1 的 k 次多项式,其生成只依赖于自变量的值 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$。

2.3 正交多项式拟合结果向一般多项式的转换

正交多项式的拟合结果很不直观,可以通过简单的变换将式(1) 转换为一般多项式:

$$P_m(x) = b_m^0 + b_m^1 x + b_m^2 x^2 + \cdots + b_m^m x^m \tag{8}$$

对此,首先将正交多项式系中的 $p_k(x)$ 转换成如下形式:

$$p_k(x) = d_k^0 + d_k^1 x + d_k^2 x^2 + \cdots\cdots + d_k^k x^k \tag{9}$$

对系数 $d_k^j(k = 0,1,\cdots,m;\ j \leqslant k)$ 有

$$k = 0:\quad d_0^0 = 1$$

$$k = 1:\quad d_1^0 = -A_1 \quad d_1^1 = 1$$

$$k \geqslant 2:\quad \begin{cases} d_k^0 = -A_k d_{k-1}^0 - B_{k-1} d_{k-1}^0 \\ d_k^j = d_{k-1}^{j-1} - A_k d_{k-1}^j - B_{k-1} d_{k-2}^j \qquad (1 \leqslant j < k-1) \\ d_k^{k-1} = d_{k-1}^{k-2} - A_k \\ d_k^k = 1 \end{cases} \tag{10}$$

然后,计算式(8) 的系数 $b_m^i(i = 0,1,\cdots,m)$。由于 $P_m(x)$ 是在 $m-1$ 次多项式 $P_{m-1}(x)$ 的基础上加上一个 m 次正交多项式 $p_m(x)$,故由式(1)、(8)、(9) 得到递推公式:

$$\begin{cases} b_k^k = 1 \\ b_k^j = b_{k-1}^j + a_k d_k^j \qquad (k = 1,2,\cdots,m;\ j < k) \end{cases} \tag{11}$$

2.4 拟合多项式次数的确定

对 n 组数据,采用正交多项式可以一直拟合到 $n-1$ 次多项式,但究竟几次多项式最合适,可以按回归分析进行正交多项式 $p_k(x)$ 对 y 的显著性的 F 检验来确定。

对数据 y_i,总的离差平方和 S_{yy} 为:

$$S_{yy} = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \sum_{i=0}^{n} (y_i)^2/n \tag{12}$$

k 次正交多项式 $p_k(x)$ 对 y 的作用,用偏差平方和 p_k 表示:

$$p_k = a_{kk}^2 C_{kk} = C_k^2/C_{kk} \quad (k \neq 0) \tag{13}$$

m 次拟合多项式 $P_m(x)$ 的剩余平方和及剩余方差分别为：

$$Q_m = S_{yy} - \sum_{k=1}^{m} p_k, \qquad S_m^2 = Q_m/(n-m-1) \tag{14}$$

相关系数为：

$$R = \sqrt{1 - Q_m/S_{yy}} \tag{15}$$

对于 $m(m \neq 0)$ 次拟合多项式 $P_m(x)$，其中的第 m 次正交多项式 $p_m(x)$ 的统计量为：

$$F_m = p_m/S_m^2 = p_m \cdot (n-m-1)/Q_m \tag{16}$$

因为只有一个自变量，故取第 1 自由度 $f_1 = 1$，第 2 自由度 $f_2 = (n-m-1) = n-m-1$。在计算时，可以只对 m 次拟合多项式 $p_m(x)$ 中的第 m 次正交多项式 $P_m(x)$ 作显著性检验。在拟合的过程中，逐次增大拟合 m 次，如果按式(16) 计算出的 F_m 大于 F^{α}_{1,f_2}(α 为显著水平。F^{α}_{1,f_2} 可查概率统计参考书) 而第 $m+1$ 次拟合式计算出的 F_{m+1} 小于 F^{α}_{1,f_2}，则再增加 m 时 $P_m(x)$ 已不显著，故可确定多项式次数为 m。

3 计算实例

为便于对水泵性能曲线的拟合结果进行直观分析，作者开发了可以对各种叶片泵的性能曲线进行拟合并绘制曲线图的通用程序，使用时须按一定格式生成数据文件后即可调用。

［**算例 1**］ 表 1 为某离心泵的几组性能数据，利用开发的程序对其进行不规则点的正交多项式拟合并绘图，所得结果如表 2 和图 1 所示。

表 1　某离心泵性能数据

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q(m^3/s)$	0.0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.007	0.008	0.010	0.011
H(m)	35.21	35.42	35.53	35.22	34.88	31.82	29.81	23.94	18.91
N(kW)	1.61	2.01	2.23	2.55	2.77	3.51	3.69	4.15	4.42
η(%)(计算)	0.0	17.29	31.26	40.65	49.41	62.25	63.40	56.59	46.17

表 2　某离心泵性能曲线拟合结果

内容	m	F_m	R	S_m	一般多项式系数		
$H \sim Q$	4	13.26	0.9999	0.1248	$b_0 = 35.16762$ $b_3 = 0.02600$	$b_1 = 0.54594$ $b_4 = -0.00196$	$b_2 = -0.23274$
$N \sim Q$	1	1794.8	0.9981	0.06594	$b_0 = 1.73560$	$b_1 = 0.24608$	
$\eta \sim Q$	2	864.6	0.9987	1.25325	$b_0 = 0.63961$	$b_1 = 17.06044$	$b_2 = -1.16351$

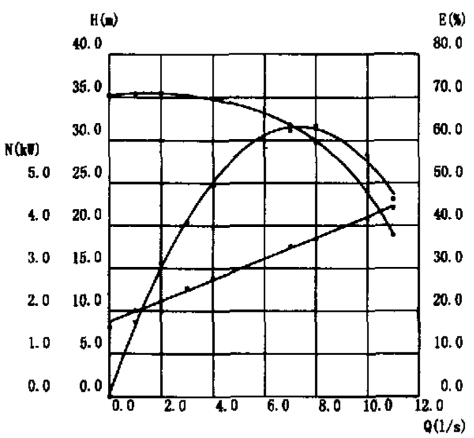

图 1　拟合的某离心泵性能曲线图

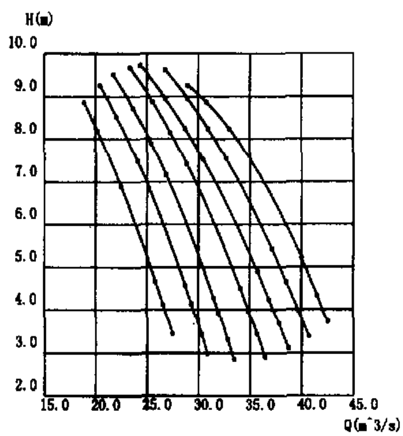

图 2　拟合的某轴流泵 $H \sim Q$ 性能曲线图

[算例2] 表3为某轴流泵的几个叶片角度下的 $H\sim Q$ 性能数据，对其进行不规则点的正交多项式拟合，所得结果如表4和图2所示。

表3 某轴流泵 $H\sim Q$ 性能数据 单位:Q—m^3/s, H—m

角度		1	2	3	4	5	6	7	8
+6°	Q	28.95	30.79	33.01	39.98	41.51	42.47		
	H	9.26	8.87	8.24	5.21	4.33	3.74		
+4°	Q	26.77	28.97	30.93	32.67	37.14	38.51	39.66	40.66
	H	9.62	8.95	8.24	7.56	5.42	4.66	3.99	3.39
+2°	Q	24.33	26.82	28.74	30.44	35.72	36.86	37.77	38.71
	H	9.73	8.94	8.24	7.53	4.90	4.24	3.69	3.11
0°	Q	23.33	25.55	27.30	28.87	34.08	34.90	35.66	36.45
	H	9.68	8.88	8.15	7.42	4.50	3.96	3.45	2.91
−2°	Q	21.74	23.68	25.48	26.87	31.52	32.01	32.82	33.44
	H	9.51	8.72	7.88	7.16	4.27	3.91	3.32	2.85
−4°	Q	20.43	22.07	24.04	25.20	28.74	29.34	30.28	30.87
	H	9.26	8.52	7.51	6.85	4.57	4.14	3.44	2.99
−6°	Q	18.89	20.20	22.48	25.86	26.59	27.47		
	H	8.86	8.19	6.89	4.65	4.12	3.45		

表4 某轴流泵 $H\sim Q$ 性能曲线拟合结果

角度	m	F_m	R	S_m	一般多项式系数		
+6°	2	50321	1.0000	0.00253	$b_0=0.69133$	$b_1=0.77635$	$b_2=-0.01659$
+4°	2	7137	1.0000	0.00683	$b_0=8.22324$	$b_1=0.38182$	$b_2=-0.01232$
+2°	2	24476	1.0000	0.00383	$b_0=9.44919$	$b_1=0.30823$	$b_2=-0.01220$
0°	2	24476	1.0000	0.00383	$b_0=9.44919$	$b_1=0.30823$	$b_2=-0.01220$
−2°	2	24970	1.0000	0.00364	$b_0=9.56006$	$b_1=0.33884$	$b_2=-0.01430$
−4°	2	59819	1.0000	0.00187	$b_0=10.86659$	$b_1=0.26686$	$b_2=-0.01691$
−6°	2	19164	1.0000	0.00183	$b_0=12.25822$	$b_1=0.12981$	$b_2=-0.01640$

4 结论

采用正交多项式并最终转化为一般多项式来拟合水泵性能曲线，可避免解联立方程组的繁琐和不稳定性，并根据数据分析来确定多项式的次数m，使m的取值不受人为经验限制。另外，各正交多项式之间互相正交，增减(最高) 项次时，低次项的拟合系数并不改变，这就避免了重复计算。

在F显著性检验的同时结合输出的曲线形状的直观分析，可以判定试验数据的可靠性以及实验点据中是否有明显的错误点。当实验数据本身误差较大时，应当提高显著水平要求，否则就会得到一条多弯的高次曲线。

参 考 文 献

1 刘自放，张超英. 离心泵 $Q\sim H$ 曲线的函数式全程拟合. 给水排水，1993(6):42~45

2 孙杰. 自动回归离心泵性能曲线的正交多项式法. 水泵技术，1991(3),60~64

3 张启锐. 实用回归分析. 北京:地质出版社，1988:216~222

4 严桂兰等. C语言与图形处理. 上海:华东化工学院出版社，1993:230~246

Orthogonal Polynomial Fitting for Pump Characteristic Curves

ZHOU Long-cai, QIU Chuan-xin

(School of Water Resource and Hydropower, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: Orthogonal polynomial is used to fit the characteristic curves of pump with random data to avoid the ill—conditioned system of equations that probably appears in ordinary polynomial fitting. The Forsythe Recurrence Method is adopted to generate the orthogonal polynomial, and the degree of the polynomial is determined by significance test. Using drawing program to make intuitive analysis for the computation, the method is shown to be practical by several actual examples.

Key words: Pumps, Characteristic curve, Orthogonal polynomial, Fitting