

# 贝赛尔曲线设计离心泵叶轮的叶片型线

谢 俊

(江苏理工大学机械工程学院)

**摘 要:**采用了四次贝赛尔曲线设计离心泵叶轮的叶片展开流线,摒弃了传统的三次多项式拟合带来的曲线调整的不方便性,避免了样条函数解矩阵方程组的繁琐,使得设计简单,曲线更加光滑平顺,且便于控制,能满足水泵汽蚀和效率的不同要求。

**关键词:**贝赛尔曲线 离心泵 叶片型线

文献标识码:A 文章编号:1005-6254(2000)04-0001-03

## 1 引言

离心泵叶轮的设计<sup>[1]</sup>,在完成中间流线划分和流线分点后,就要在展开流面(方格网)上画出流线,为叶片绘型作准备。展开流线的形状直接关系到所设计叶轮的水力性能。一般要求曲线在出口部分有一段安放角保持不变,而其余部分安放角变化尽可能均匀。手工设计时,曲线可以经过多次修改近似满足要求,但不可避免存在很大误差。在计算机辅助设计系统中,当进出口安放角均已知的情况下,以前有文献采用三次多项式作为展开流线<sup>[2]</sup>,根据进出口处的坐标及斜率确定三次多项式的系数,显然这样的数学处理过于简单,无法控制其一阶导数的递增性,曲线有可能产生奇异;从实际的绘图效果看,不能保证对展开流线的一般要求,且不便于调整和修改。还有文献采用样条函数<sup>[3]</sup>,需通过输入节点坐标来绘制展开流线,这样人为因素影响较大,人的干预就大,且计算量很大,要解大型矩阵方程,这种方法工作量大,过于复杂,缺少灵活性和直观性。

鉴于以上两种方法,考虑采用贝赛尔曲线<sup>[4]</sup>绘制叶片的展开流线。

## 2 数学模型

贝赛尔曲线最早在汽车车身曲面设计中得到采用,并得到推广。在工程设计中,常使用贝赛尔曲线来设计任意曲线。一些关键点精确定位后,使用贝赛尔曲线设计曲线,设计师可以比较直观地意识到所给条件和设计出的曲线之间的关系。

贝赛尔曲线的形状是通过一组多边折线的各顶点唯一定义出来的,该多边折线称为贝赛尔多边形或特征多边形。在特征多边形各顶点中,只有第一点和最后一点在曲线上,其余的顶点则用以定义曲线的导数、阶次和形状,第一条和最后一条折线则表示出曲线在起点和终点处的切线方向。曲线的形状趋向仿效特征多边形的形状,改变特征多边形的顶点和改变曲线形状有着形象生动的直观联系。

贝赛尔曲线的数学基底是在第一和最后端点之间内插的多项式混合函数。通常  $n+1$  个顶点定义一个  $n$  次多项式。曲线上各点的方程式为:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

式中,  $p_i$  为各顶点的位置向量;  $B_{i,n}(t)$  是古典的伯恩斯坦多项式,称为基底函数,也即贝赛尔多边形各顶点位置向量之间的混合函数。

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

当  $t=0$  时,  $P(0) = p_0$ ; 当  $t=1$  时,  $P(1) = p_n$ 。这里规定  $0$  和  $0^0$  都为  $1$ 。由此可见,曲线通过特征多边形的起点和终点。

$$\begin{aligned} \text{因 } B'_{i,n}(t) &= \frac{n!}{i!(n-i)!} [it^{i-1}(1-t)^{n-i} \\ &\quad - (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}] \\ &= n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} p_i [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]$$

则在始点处  $t = 0 : P'(0) = n(p_1 - p_0)$  ; 在终点处  $t = 1 : P'(1) = n(p_n - p_{n-1})$  , 这说明贝赛尔曲线在始点和终点处的切线方向与贝赛尔多边形第一边及最后一边的走向一致。

$$\text{而 } P'(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (p_{i+2} - 2p_{i+1} + p_i) \cdot B_{i, n-2}(t)$$

所以, 始点处  $P'(0) = n(n-1)(p_2 - 2p_1 + p_0)$  ; 终点处  $P'(1) = n(n-1)(p_n - 2p_{n-1} + p_{n-2})$  , 这说明曲线在起点和终点处的二阶导数仅与相邻的两点位置有关, 而与其余各点的位置无关。

工程上运用的曲线, 一般情况下  $C^2$  (二阶导数) 连续的三次曲线已相当理想, 但三次贝赛尔曲线使用起来不便于控制。这里采用四次贝赛尔曲线设计离心泵叶轮的叶片型线, 通过调节中间点的位置来控制线型, 如图 1 所示。

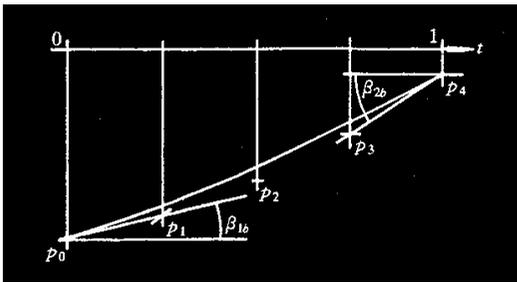


图 1 四次 Bezier 曲线

当  $n = 4$  时, 式(1)变为:

$$P(t) = (1-t)^4 p_0 + 4t(1-t)^3 p_1 + 6t^2(1-t)^2 p_2 + 4t^3(1-t) p_3 + t^4 p_4$$

即  $P(t) = [t^4 \quad t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \cdot$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$0 \leq t \leq 1$

当  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  相应的  $t = 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1$  , 对应于特征多边形的各顶点为  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4$  。在方格网上, 横坐标代表轴面, 纵坐标就是轴面流线上的分点。显然  $p_0$  和  $p_4$  两点就对应于叶片展开流线进出口处的位置,  $\beta_{1b}$  (进口叶片安放角) 和  $\beta_{2b}$  (出口叶片安放角) 已知, 这时  $p_1, p_3$  分别在  $p_0, p_4$  点的切线上, 调节  $p_2$  的纵坐标, 那么由这 5 个点构成的特征多边形就确定了四次贝赛

尔曲线。当  $t$  从 0 连续增加到 1, 则可得方格网展开流线上各点的矢量  $P(t)$  , 利用数学方法容易求出其相应各点的坐标, 绘制出叶片型线。其程序框图如图 2 所示。

用这种方法绘制流线, 能使设计人员比较直观地意识到所给条件与设计出流线之间的关系, 能方便地用程序来控制输入参数以改变流线的形状, 使进口到出口的安放角过渡均匀, 线型流畅符合设计要求。更重要的一点是, 调节  $p_2$  点的位置, 控制其纵坐标, 可自由地控制展开流线的形状。这就使得它不仅能满足一般要求, 更易于修改和调整, 以满足设计人员不同的要求 (如对汽蚀和效率要求的侧重点不同)。

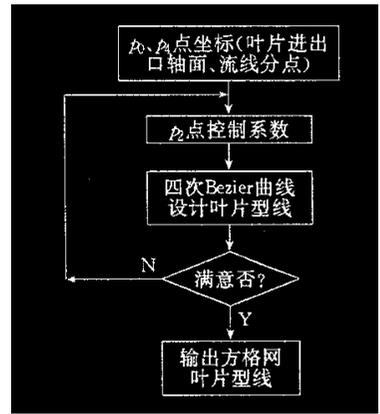


图 2 程序流程图

### 3 程序实现与应用实例

采用 Visual Basic 5.0<sup>[5]</sup> 语言编写了离心泵叶轮计算机辅助设计及其优化的整套软件。VB 是在 Windows 平台上广泛使用的程序开发工具, 是一种面向对象的程序设计语言。其基于对象、方法和事件的编程机制, 可为应用程序设计丰富的用户界面, 支持模块化设计。基于数据库建立或录入泵的结构参数, 建立包括离心泵叶轮的轴面流道设计、分流线、叶片绘型, 绘制木模截线等模块, 并提供接口可与机械设计 CAD 软件集成。软件充分利用了设计人员的成功经验, 能同时兼顾泵的汽蚀和效率, 设计精度也完全能满足工程上的要求。该软件已在无锡某生产厂家的生产中得到验证, 用户界面好、设计速度快、与试验结果较吻合, 有一定的实用和推广价值。图 3 是 80DL-2 立式多级泵的首级叶轮叶片型线用该软件设计的结果, 其线型流畅, 安放角过渡均匀。试验表明: 该水泵的效率由原来的 67.7% 提高到 71.5%, 汽

蚀性能由原来的 2.73 m 下降到 2.42 m。

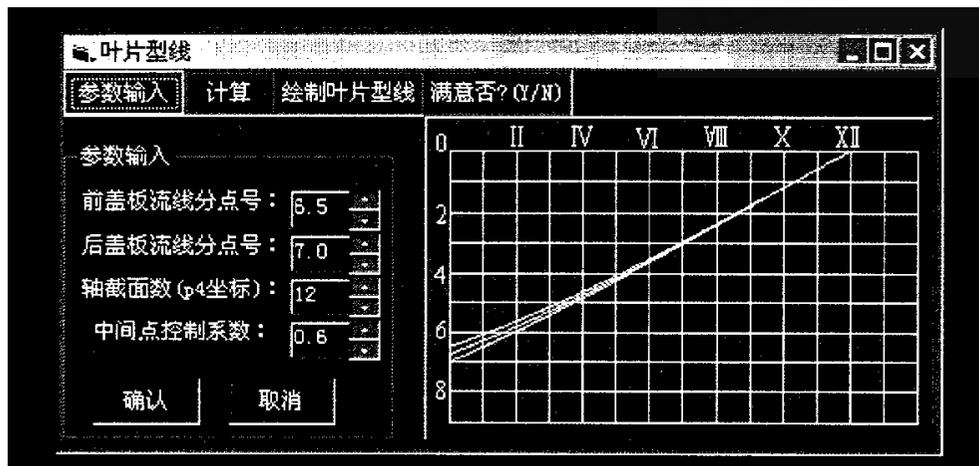


图3 方格网叶片型线

## 4 结论

采用四次贝赛尔曲线设计离心泵叶轮的叶片展开流线,采用VB程序设计语言编程,用户界面良好,设计简单,设计周期短,曲线便于控制,能满足水泵汽蚀和效率的不同要求。

### 参 考 文 献

- 1 查森.叶片泵原理及水力设计.北京:机械工业出版社,1988
- 2 陈世亮.离心泵计算机辅助设计[学位论文].镇江:江苏理工大学,1990
- 3 崔韵春,陈次昌.离心泵计算机辅助绘图方法改进.排灌机械,1992,10(2):18~22
- 4 孙家广,许隆文.计算机图形学.北京:清华大学出版社,1992:78~81
- 5 李兰友,庄园瑜,秦卫光.Visual Basic 绘图与图象处理.北京:人民邮电出版社,1999:150~154

## Design for the Blade Shape of Centrifugal Pump Using Bezier Curve

XIE Jun

(School of Mechanical Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

**Abstract**: Bezier curve is used to design for the blade shape of centrifugal pump. A traditional method of third order polynomial calculation for the blade shape is abandoned, and the spline function that must solve huge equations and is very complicated is also avoided. Using Bezier curve can make design simply, and the blade shape can be controlled easily. It can satisfy the different demand for cavitation and efficiency.

**Key words**: Bezier curve, Centrifugal pump, Blade shape