排灌机械工程学报
Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering
2012 年 5 月 May 2012 | 第 30 卷 第 3 期 Vol. 30 No. 3

doi:10.3969/j.issn.1674-8530.2012.03.004

基于儒可夫斯基变换的轴流叶片翼型设计

严敬[1]，王桃[1]，肖国华[2]，李宇[2]
（1. 西华大学能源与环境学院，四川 成都 610039；2. 自贡工业泵有限责任公司，四川 自贡 643600）

摘要：为了改善轴流泵叶片翼型的水力性能，创新这类叶片的设计理论，给出了一种新颖的翼型骨线计算方法. 以代表平面图形复变量的儒可夫斯基变换为基础，阐述了轴流翼型和叶片设计计算的原理与方法. 通过复变量的定量计算，介绍了由偶极子、点涡和平面均匀流 3 种势流叠加后的复杂流动所产生的偏心圆的几何特性、流动特性及圆周上驻点的位置，讨论了以儒可夫斯基变换所得到的圆弧的几何性质和绕流动力特征，在此基础上，根据平面有势流动绕流变换曲线环量的不变性和变换前后复平面上无穷远来流速度大小和方向的不变性，给出了确定最终所得翼型骨线的方位及形态的应用性方法和步骤. 导出的轴流式叶片翼型骨线计算的基本原理与过程，与升力法、奇点分布法、流线法等传统的叶片翼型设计准则有完全不同的理论基础和实施过程，方法易于设计人员在设计实践中应用，可为轴流叶片设计人员提供一种轴流叶片翼型设计新方法.

关键词：轴流叶轮；翼型；儒可夫斯基变换；复变量分析；设计
中图分类号：S277.9；TH312　**文献标志码**：A　**文章编号**：1674-8530(2012)03-0265-05

Design program for axial flow impeller blade based on Joukowski transform

Yan Jing[1], *Wang Tao*[1], *Xiao Guohua*[2], *Li Yu*[2]
(1. School of Energy and Environment, Xihua University, Chengdu, Sichuan 610039, China; 2. Zigong Industry Pump Co. Ltd., Zigong, Sichuan 643600, China)

Abstract: To improve the performance of axial pump and upgrade new the design principle of the pump blades, a new approach for calculating the blade camber was proposed here. The principle and procedure that the approach designs the blades of axial flow impeller were presented based on the Joukowski transform. The geometrical properties of an eccentric circular cylinder, which was formed by the superposition of three two-dimensional potential flows – a doublet, a uniform plane flow and a point vortex, fluid dynamics around it and the position of stagnation point on it were described. Further, the geometrical properties of a circle arc, which was derived from Joukowski transform, and the fluid dynamics around it were discussed as well. Based on the above achievements, the method and producer for determining the direction and shape of a blade camber were developed in terms of the specified circulation and freestream velocity. The method and producer proposed here are completely different from the traditional ones, such as the singularity method, streamline method and so on for axial flow pump blades. The new approach is easily handled by pump engineers and it is hopeful that the approach can offer a new way for designing axial flow pump blades for the engineers.

Key words: axial flow impellers; airfoil; Joukowski transform; complex variable analysis; design

收稿日期：2011-09-29
基金项目：四川省重点学科建设重点项目(SZD0412-9)；西华大学能源与环境学院科研预研项目
作者简介：严敬(1947—)，男，江苏苏州人，教授(jingyan16@yahoo.cn)，主要从事泵内流场及设计新方法研究.
王桃(1978—)，女，四川成都人，讲师(通信作者，mailtowangtao@sohu.com)，主要从事泵内流场研究.

轴流泵大流量低扬程的外特性决定了这一泵型在国民经济的众多部门具有不可替代的作用,属于农业排灌、化工、冶金、石油、矿山等行业的关键设备. 叶轮是轴流泵的核心部件,不断创新叶轮设计理论与方法是提高泵水力性能的重要举措. 在根据用户提供的设计参数设计轴流叶轮时,众多企业目前使用以下一些方法,这些方法显示了一定的生命力,但也有各自的不足[1-2]:

相似设计法是使用最多的一种方法,即设计人员寻求一个与待设计泵比转速相近的已有叶轮,根据相似定理修正其线性尺寸,由此得新叶轮的图样. 但是,很多时候并不容易找到符合条件的已有优秀叶轮资料,在最理想条件下这一方法所形成的新叶轮的水力性能也难以超越原有产品. 升力法是国内较早使用的一种半理论半经验的方法,这一方法在引滦入津等工程中发挥过巨大作用. 这一方法的不足在于,方法过度依赖翼型资料,现有翼型的动力特性大都是国外早期通过风洞实验获得的,空气与水的压缩性、黏性等物理性质有较大差异;轴流叶片翼型在展开流面上排列为一个平面无穷直列叶栅,栅中翼型与单翼的性能差异只能以经验方法修正;为此有专家明确指出"轴流泵不宜按升力法设计"[3]. 奇点分布法在轴流式水轮机的设计中取得了较好的效果,这是一种基于复变量变换、数值积分以及平面势流理论的理论色彩较浓的方法,由于这一方法理论难度过大,巨大的计算量必须形成复杂的高级语言算法程序方可实现,甚至直到现在,在完成计算翼型骨线上由设定连续分布涡产生的诱导速度的核心积分时,也只能以涅伯米宁早期导出的解析式获取骨线上7个点的精确位置,有的大流量轴流叶片轮缘处翼型弦长超过1 m,仅凭7个确定点难以确定翼型骨线准确状态. 这些因素决定了这一方法还没有被国内水泵企业广泛接受.

为了满足企业提高轴流泵效率等指标的市场需要,校企联合开发了文中介绍的基于儒可夫斯基变换的轴流叶片翼型设计新方法. 这一方法理论严格,不需编程即可得到叶片骨线的解析解. 这一设计方法与近期出现的流线法一样,为企业技术人员提供了一种与传统方法的基础理论与设计程序有根本区别的叶片翼型设计新途径,有希望提升轴流叶轮的设计质量与水平.

1 圆柱有环量绕流的驻点

设一个半径为 a 的圆,其圆心在 ζ 复平面的原点. 平面上一个给定点位于 $c-m\mathrm{i}$,这里 a,c,m 均为正实数,且 $c^2+m^2=a^2$,因而这一点在上述圆的圆周上. 这一圆实际代表了与复平面垂直的无穷长的一个圆柱体. 这一圆柱体被一平面均匀流绕流. 同时在平面上无穷远处,均匀流速度的大小为 v_∞,速度方向与正实轴夹角为 α. 在平面原点设置一个强度为 Γ 的顺时针点涡,这里 $\Gamma=4\pi a v_\infty \sin[\alpha+\arctan(m/c)]$. 这一流动模型见图1.

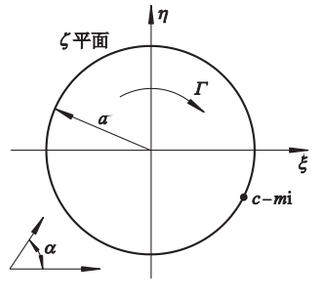


图1 平面势流叠加

Fig. 1 Superposition of planar potential flows

下面将证明圆周上的给定点为一驻点[4].

由平面势流叠加原理,这一复杂平面流动的复势 $W(\zeta)$ 应为3个平面有势流动的复势的叠加[5],它们是一个强度 $M=2\pi v_\infty a^2$,轴线与实轴夹角为 α 的原点处偶极子;一个强度 Γ 等于上述值的原点顺时针点涡;一个倾斜角为 α 的平面均匀流. 于是:

$$W(\zeta)=\frac{M}{2\pi}\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}\frac{1}{\zeta}-\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\zeta+v_\infty\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}\zeta=$$

$$\frac{v_\infty a^2\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}}{\zeta}-\frac{2av_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]\ln\%\,\zeta}{\mathrm{i}}+v_\infty\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}\zeta,$$

式中:i 为复变量的虚单位.

平面流动的复速度 $\bar{v}(\zeta)$ 等于 $\mathrm{d}w(\zeta)/\mathrm{d}\zeta$,对式(1)进行微分得

$$\bar{v}(\zeta)=-\frac{v_\infty a^2\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}}{\zeta^2}+\frac{2av_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]\mathrm{i}}{\zeta}+$$

$$v_\infty\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}.$$

圆周上给定点的极坐标表达式显然为 $\zeta=a\mathrm{e}^{-\arctan(m/c)\mathrm{i}}$,代入式(2)即得到圆周上给定点的复速度:

$$\bar{v}(\zeta)=-\frac{v_\infty a^2\mathrm{e}^{[\alpha+2\arctan(m/c)]\mathrm{i}}}{a^2}+$$

$$\frac{2av_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]}{a}\mathrm{e}^{\arctan(m/c)\mathrm{i}}\cdot\mathrm{i}+$$

$$v_\infty\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}=-v_\infty\cos[\alpha+2\arctan(m/c)]-$$

$$v_\infty\sin[\alpha+2\arctan(m/c)]\mathrm{i}+$$

$$2v_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]\{\cos[\arctan(m/c)]+$$

$$\mathrm{i}\cdot\sin[\arctan(m/c)]\}\mathrm{i}+v_\infty(\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\mathrm{i})=$$

$-v_\infty\cos[\alpha+2\arctan(m/c)]-2v_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]\sin[\arctan(m/c)]+v_\infty\cos\alpha+\{-v_\infty\sin[\alpha+2\arctan(m/c)]+2v_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]\cos[\arctan(m/c)]-v_\infty\sin\alpha\}\mathrm{i}=0+0\mathrm{i}.$

这一结果表明给定点上复速度为0,给定点是一驻点.

将上述圆及圆心处的偶极子、点涡在平面上向上平移 m 得到一个偏心圆,其圆心位于 $m\mathrm{i}$ 处;圆周上原处于实轴下方的给定点在移动后位于实轴($c+0\mathrm{i}$)点,这点记为 C. 由于移动前后圆的半径 a 不变,圆心处偶极子强度、点涡强度 M,Γ 均未改变,且仍被同一性质的平面均匀流绕流,因而圆周上 C 点仍为驻点.

2　儒可夫斯基变换

将 ζ 平面上一条给定曲线映射到 z 平面时,一个重要的变换是儒可夫斯基变换,其变换式为 $z=\zeta+\frac{c^2}{\zeta}$,根据需要,式中常实数 c 为 C 点实部.

现证明,ζ 平面上的上述偏心圆经儒可夫斯基变换将得到 z 平面上一圆弧[4].

在偏心圆上取一点 $\zeta=R\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$,应注意,点的极径 R 和幅角 θ 随点在圆周上位置不同而变化,因而都不是常数,见图2.

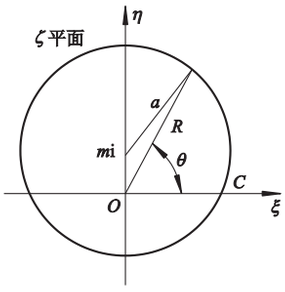


图2　偏心圆几何量

Fig. 2　Geometry of an eccentric circular cylinder

将 ζ 代入儒可夫斯基变换式得

$$z=x+y\mathrm{i}=\zeta+\frac{c^2}{\zeta}=R\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}+\frac{c^2}{R\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}}=\left(R+\frac{c^2}{R}\right)\cos\theta+\left[\left(R-\frac{c^2}{R}\right)\sin\theta\right]\mathrm{i}.$$

由此可得到以两参数 R 和 θ 所表示的点的直角坐标:

$$x=\left(R+\frac{c^2}{R}\right)\cos\theta,\tag{3}$$

$$y=\left(R-\frac{c^2}{R}\right)\sin\theta.\tag{4}$$

由式(3),(4)有

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=4c^2\sin^2\theta\cos^2\theta.\tag{5}$$

如前文所述,$c^2+m^2=a^2$. R 与 θ 并不独立,在图2应用余弦定理得

$$a^2=m^2+R^2-2mR\cos(\pi/2-\theta).\tag{6}$$

将 $a^2=c^2+m^2$ 代入式(6),有

$$\sin\theta=\frac{1}{2m}\left(R-\frac{c^2}{R}\right).\tag{7}$$

将式(7)代入式(4)得

$$\sin^2\theta=\frac{y}{2m}.\tag{4}$$

同时有

$$\cos^2\theta=1-\frac{y}{2m}.\tag{9}$$

将式(8),(9)代回式(5),得到消去参数 θ 直接反映 x,y 函数关系的方程:

$$x^2+y^2+2\left(\frac{c^2}{m}-m\right)y=4c^2$$

或

$$x^2+\left[y+\left(\frac{c^2}{m}-m\right)\right]^2=4c^2+\left(\frac{c^2}{m}-m\right)^2.\tag{10}$$

这是一个 z 平面上圆心在$\left[0,-\left(\frac{c^2}{m}-m\right)\right]$,半径为$\sqrt{4c^2+\left(\frac{c^2}{m}-m\right)^2}$的圆. 在式(8)中,当 θ 取 θ_0 和 $-\theta_0$ ($0<\theta_0<\pi$)时,y 值为同一正值,因而上述圆实际是 z 平面上实轴上方的一段圆弧;当 θ 从0增大到 π 或从0减小到 $-\pi$ 时,ζ 平面实轴上部大圆弧及下部小圆弧都将映射为 z 平面上述这一圆弧.

由儒可夫斯基变换式可知,ζ 平面上($c+0\mathrm{i}$)点及对称点($-c+0\mathrm{i}$)分别变换成 z 平面上($2c+0\mathrm{i}$)及($-2c+0\mathrm{i}$)两点,因而 z 平面上圆弧弦长 $b=4c$. 当 $\theta=\pi/2$ 时,式(3)中 $x=0$,而式(8),(9)中 $y=2m$,可知圆弧拱高 $f=2m$.

儒可夫斯基变换不改变两平面上无穷远处流态,也不改变变换前后同一曲线的绕流环量,因而 z 平面和 ζ 平面上无穷远来流的大小、方向均无变化,均匀流绕流 z 平面上圆弧的环量 Γ 仍为 $4\pi\alpha v_\infty\sin[\alpha+\arctan(m/c)]$. z 平面上圆弧端点($2c+0\mathrm{i}$)是绕流后缘点. 由库达-恰布雷金原理,这点应为一驻点. 如前所述,这点对应 ζ 平面上的给定 C 点,已证明 C 点是驻点,因而变换满足这一原理.

如果给定了 z 平面上圆弧的弦长 b 和拱高 f,于

是 z 平面上圆弧方程(10)及环量都可用圆弧给定两几何参数表示：

$$x^2+\left[y+\left(\frac{b^2}{8f}-\frac{f}{2}\right)\right]^2=\left(\frac{b^2}{8f}+\frac{f}{2}\right)^2, \quad (11)$$

$$\Gamma=4\pi v_\infty\sqrt{\frac{b^2}{16}+\frac{f^2}{4}}\sin[\alpha+\arctan(2f/b)]. \quad (12)$$

3 设计轴流式叶片的保角变换法

轴流式叶片设计的核心步骤，是要在几个给定半径的圆柱形计算流面上确定满足要求的翼型的骨线，上述保角交换原理给出了确定它们的基础.

叶轮在设计点的扬程 H(m)、叶轮旋转角速度 ω(1/s)、叶片数 z 以及水力效率 η_h 是给定的或在前期确定的已知量[6-7]，它们与计算流面上水流绕流叶轮中一个翼型的环量 Γ(m^2/s)有如下关系：

$$\Gamma=\frac{H}{\eta_h}\cdot\frac{2\pi g}{\omega z}. \quad (13)$$

翼型在计算流面上作平动，水流的牵连速度为一常数，因而相对速度绕流一翼型产生的环量等于绝对速度绕流同一翼型的环量，都等于式(12)的计算值.

栅中翼型进、出口相对速度的几何平均值与单翼的无穷远相对速度绕流有相同的流体动力效果. 因而在计算相对速度产生的绕流单翼的环量时，应将式(12)中的 v_∞ 改为叶栅前后相对速度的几何平均值 $\bar{w}_\infty$(m/s)，w_∞ 及相对平均几何矢量与列线的夹角 β_∞ 都易于计算[8-9].

由以上分析可知，式(12)，(13)是等值的(式(12)中 v_∞ 已改为 w_∞)，由此得到方程：

$$\frac{H}{\eta_h}\cdot\frac{2\pi g}{\omega z}=4\pi w_\infty\sqrt{\frac{b^2}{16}+\frac{f^2}{4}}\sin\left[\alpha+\arctan\left(\frac{2f}{b}\right)\right], \quad (14)$$

在应用文中的基本理论和结果计算绘型一给定圆柱形流面上的翼型时，应经历以下4个步骤，而这一圆柱面半径 r(m)、叶轮叶片数 z 和叶栅稠密度 $\frac{b}{t}$ 按一定原则已在前期确定.

1) 计算展开流面上各翼型集合形成的无穷直列叶栅的栅距 $t=\frac{2\pi r}{z}$，再由确定的叶栅稠密度计算翼型弦长 $b=\left(\frac{b}{t}\right)t$.

2) 由叶栅前后根据设计点理论扬程、理论流量确定的速度三角形，计算栅前栅后相对速度矢量的几何平均速度的大小 w_∞ 及其与列线夹角 β_∞：

$$w_\infty=\sqrt{v_m^2+\left(u-\frac{v_{u2}}{2}\right)^2},$$

$$\beta_\infty=\arctan\left[v_m/\left(u-\frac{v_{u2}}{2}\right)\right],$$

式中：v_m 为叶轮区域的轴面速度；u 为翼型的圆周运动速度；v_{u2} 为翼型出口绝对速度的圆周分量. 它们都已经在前期计算中获得.

应当指出，w_∞ 与 β_∞ 是由泵给定设计参数决定的客观流动物理量，它们并不与某一特定的叶片设计方法相联系，几乎所有的叶片设计方法都要利用这两个物理量.

3) 确定翼型骨线拱高 f. 根据 NACA 等优秀翼型资料，f 可取 0.04b 左右. 这时式(14)中只有 α 是未知量. 计算 α，最后得到翼型弦线与列线夹角 β_e，$\beta_e=\beta_\infty+\alpha$，见图3.

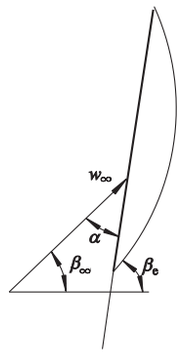


图3 翼型骨线

Fig. 3 Mean line of and airfoil

4) 在平面上作一条长度为 b 且与水平列线方向夹角为 β_e 的线段. 以这一线段为弦作一个半径为 $\left(\frac{b^2}{8f}+\frac{f}{2}\right)$ 的圆弧，得到翼型的骨线.

已有大量研究结果指出，翼型骨线的形态对流动的影响是全局的，翼型厚度分布则只有局部影响. 建议使用被广泛应用的性能良好的791翼型资料加厚骨线[9]，得到计算流面的完整翼型，完成叶轮水力设计的关键内容，如图4所示，相关数据见表1，其中 δ_{max} 为给定的翼型最大厚度.

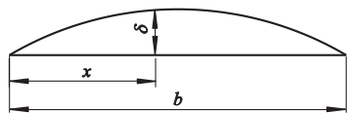


图4 791翼型的厚度变化

Fig. 4 Thickness distribution of airfoil 791

表1　791翼型的厚度变化

Tab.1　Thickness distribution of airfoil 791

x/b	0	0.050	0.075	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	1.000
δ/δ_{max}	0	0.296	0.405	0.489	0.778	0.920	0.978	1.000	0.883	0.756	0.544	0.356	0.200	0

加厚时,以型线为工作面向背面加厚.

作者在自贡工业泵有限责任公司,以上述设计原理和方法开发了一台肘管式化工轴流泵,该泵设计点流量、扬程、转速分别为19 500 m^3/h,2.5 m,235 r/min,比转速 n_s=1 004.型式试验结果表明,泵在设计点的性能参数满足GB/T 3216—2005的十字检查要求,在扣除肘型节段式"虾米"弯头不可低估的局部水力损失后,水力效率计算值不低于0.92,高于同类产品值,表明文中的理论方法有重要工程意义.

4　结　论

以复变量的包角变换原理为基础,将儒可夫斯基变换函数应用到轴流叶轮叶片的翼型设计,提出了一种理论基础和计算步骤与传统方法都有根本区别的翼型骨线确定方法.这一方法理论严密,能保证叶轮实现设计工况点给定的性能指标.同时,说明了使用这一方法的计算和翼型绘型步骤.这一创新方法的出现,有望为轴流叶轮设计人员提供一个新颖的设计途径,丰富拓宽轴流叶轮设计实践领域.

在适当时候,应对以这种方法设计的叶轮完成内流场测试或数值模拟,从微观角度证明这一方法的合理性和先进性.

参考文献(References)

[1] Singh P, Nestmann F. Axial flow impeller shapes: Part 1 [J]. World Pumps, 2011(2):36-39.

[2] Singh P, Nestmann F. Axial flow impeller shapes: Part 2 [J]. World Pumps, 2011(3):38-41.

[3] 杨敬江,关醒凡. 高比转数轴流泵水力模型设计[J]. 农业机械学报, 2008,39(12): 89-92.
Yang Jingjiang, Guan Xingfan. Hydraulic design of high specific speed model axial-flow pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008,39(12): 89-92. (in Chinese)

[4] 罗惕乾,程兆雪,谢永曜. 流体力学[M]. 北京:机械工业出版社,2008:311-322.

[5] 严敬,赵琴,杨小林. 工程流体力学[M]. 重庆:重庆大学出版社,2008:108-111.

[6] 关醒凡. 现代泵理论与设计[M]. 北京:中国宇航出版社,2011:511-515.

[7] 杨帆,刘超,汤方平,等. 大型立式轴流泵装置流道内部流动特性分析[J]. 农业机械学报,2011,42(5):39-43.
Yang Fan, Liu Chao, Tang Fangping, et al. Characteristics of flow in large vertical axial flow pumping system [J]. Transaction of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(5):39-43. (in Chinese)

[8] Singh P, Nestmann F. Exit blade geometry and part-load performance of small axial flow propeller turbines: An experimental investigation[J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2010,34(6):798-811.

[9] Li Wenguang. Verifying performance of axial-flow pump impeller with low NPSHr by using CFD[J]. Engineering Computations, 2011,28(5):557-577.

(责任编辑　张文涛)