

doi:10.3969/j.issn.1674-8530.13.0221

不同雷诺数下混流式水轮机密封间隙通道
内流动特征分析

王文全, 尹锐, 闫妍

(昆明理工大学土木工程学院, 云南 昆明 650500)



王文全

摘要: 针对水轮机密封间隙流道空间尺度相差较大, 为实现对间隙流道的整体精确计算, 文中采用分步投影法, 求解间隙流道内不可压缩的 Navier - Stokes 方程. 为更好地捕捉到间隙通道内的涡结构特征, 对梳齿密封间隙采用六面体网格划分, 在壁面边界处进行网格加密. 扩散项采用二阶中心差分格式, 对流项采用 Quick 迎风差分格式. 通过数值求解得到不同流动雷诺数下间隙流道内速度、压力及涡量的分布规律, 同时得到顶盖压力、间隙流道产生的轴向推力和转轴力矩. 计算结果表明: 流体从间隙进入梳齿空腔后, 形成典型的旋涡耗能结构而耗散部分动能, 对降压节流起到主要作用, 同时, 雷诺数对腔体内的旋涡形态影响较大. 计算结果有助于理解不同流动雷诺数下水轮机密封间隙渗漏流道内复杂流动的真实物理机理以及密封间隙对轴系结构动力学特性的影响.

关键词: 混流式水轮机; 间隙密封流道; 梳齿密封; 雷诺数; 数值模拟; 试验测试

中图分类号: S277.9; TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-8530(2014)07-0611-06

王文全, 尹锐, 闫妍. 不同雷诺数下混流式水轮机密封间隙通道内流动特征分析[J]. 排灌机械工程学报, 2014, 32(7): 611-616.

Wang Wenquan, Yin Rui, Yan Yan. Analysis of flow in side chamber and path of comb-labyrinth seal in Francis turbine at different Reynolds numbers[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering (JDIME), 2014, 32(7): 611-616. (in Chinese)

Analysis of flow in side chamber and path of comb-labyrinth seal in
Francis turbine at different Reynolds numbers

Wang Wenquan, Yin Rui, Yan Yan

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract: Since there is a large difference in geometrical scale in the side chamber and comb-labyrinth seal of Francis turbine runner, the fractional step method is used to solve the unsteady, three-dimensional, incompressible Navier - Stokes equations for the flow in the chamber and tortuous path of the seal. In order to capture vortex structure more exactly, the hexahedral mesh with refinement near the wall boundaries are adopted. The Quick upwind and second-order central difference schemes are selected for convection and diffusion terms, respectively. The velocity and vorticity profiles in the path of labyrinth seal are obtained at different Reynolds numbers; meanwhile the pressure distribution in the side chamber, axial thrust on the runner and torque on the shaft are estimated. It is turned out that a vortex structure can be developed as soon as the fluid enters the path of the labyrinth seal to consume a certain amount of kinetic energy, and a pressure drop is established to prevent the leakage. Note that the vortex structure is largely affected by Reynolds number. The results may be helpful in understand-

收稿日期: 2013-11-01; 网络出版时间: 2014-07-15

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3969/j.issn.1674-8530.13.0221.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11262008, 11002063)

作者简介: 王文全(1977—), 男, 四川蓬安人, 教授(wwquan@126.com), 主要从事水力机械研究.

尹锐(1991—), 男, 安徽六安人, 硕士研究生(hch@ujs.edu.cn), 主要从事计算流体力学研究.

ding the physical mechanism of complex flow in the path of comb-labyrinth seal and the influence of the seal on rotordynamics of Francis turbine.

Key words: Francis turbine; seal passage; labyrinth seals; Reynolds number; numerical simulation; experiment

目前数值模拟方法已经在水力机械的水力设计和流动特性研究中得到了广泛的应用^[1-2],大量文献研究了水轮机主流道内的流动特征^[3-5].对混流式水轮机而言,在转轮转固界面上,设置了密封装置(如迷宫密封、梳齿密封等),同时在转轮上冠与顶盖之间以及转轮下环与底环之间形成2个环形空腔,环形空腔内往往设置一些减压装置(如减压板,或与之相连的泄水孔、均压管等)和结构上需要的径向肋梁等,可见间隙流道自身几何结构是极其复杂的.

一些学者通过分析认为影响间隙压力分布和作用力大小变化的主要因素就是进入两环形空间各自的水流在进入时所具有的圆周速度及其流量,因此从泄漏流量角度探讨间隙流对机组稳定性的影响.如吴刚等^[6]对水轮机密封装置研究发现产生抬机现象与转轮泄漏量大小有关.戴勇峰等^[7]研究了转轮泄漏量与密封间隙和转子的轴向位置关系,认为密封间隙流对机组运行稳定性有重要影响.梁武科等^[8]对含减压管的原型水轮机进行三维全流道湍流计算,分析了压力腔及转轮密封间隙中压力脉动的形成过程,并且分析了减压管与转轮密封间隙泄漏量的关系,认为压力腔中的压力脉动会影响机组运行的稳定性.文献[9-11]对蜂窝密封耗能机理以及在水轮机上的应用进行一系列试验和数值模拟,探索新的密封结构,以改善机组稳定性.文献[12]利用Vreman亚格子大涡模型计算了水轮机主流道和密封间隙流道内的流动涡结构,并探讨了密封间隙宽度对顶盖压力及渗漏流量的影响.但总而言之,关于混流式水轮机转固界面密封间隙流的研究报道还不多,考虑压力腔内流动和间隙流相互干扰的整体密封通道内的流动特征的文献就更少.根本原因在于间隙的尺度与整个压力腔尺度相差较大,在CFD实施技术层面上会遇到一些困难.其次,从间隙进口到间隙出口,流道尺度的巨大变化,不仅导致流速的变化范围较大,而且形成了复杂的旋涡流动.再者,在流体力学理论方面,虽然目前针对不可压缩黏性流动计算,有相当多的解耦方法,但这些模型在一些情况下普适性差,像水轮机转轮密封狭窄间隙中的强旋涡流动,需采用更稳定的数

值模拟方法.最后,由于现代电网负荷调节更加频繁,水力暂态过程趋复杂化,在机组过渡过程中,密封间隙进、出口压力和速度等流动参量的巨大变化会引起密封间隙内流态的急剧变化,导致水力发电机组轴系受力的大幅变化,影响到水力机组的安全稳定运行.在水轮机的三维过渡过程中,密封间隙流道内流态的主要流动参数就是雷诺数.

为此,文中建立包括间隙流道在内的间隙进口到导流管出口的混流式水轮机密封间隙全流道模型,采用分区并行技术实现跨尺度的大规模流场计算,借助稳定性较好的求解不可压缩N-S方程的分步投影方法,充分考虑腔内流与间隙流的相互干扰以及水力暂态可能引起的间隙进口流动雷诺数的变化,通过对不同雷诺数下间隙流动特性的分析,提高对间隙流道内复杂流动的认识和密封间隙流对机组运行稳定性的影响.

1 数值计算方法

1.1 数学模型

间隙及间隙腔体内的流动,都假定为不可压缩牛顿流体的黏性流动,其连续性和动量方程可分别表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

式中: \mathbf{u} 为速度矢量; Re 为流动雷诺数.

1.2 时间推进方法

借鉴Chorin分步投影求解不可压缩N-S方程的思路,求解间隙流动的控制方程式(1),(2),具体步骤如下:

① 忽略压力项,求得中间速度 \mathbf{u}^* ,即

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{3}{2} A^n + \frac{1}{2} A^{(n-1)}, \quad (3)$$

$$A = u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

对于式(4)中的空间离散、对流项分别采用二阶迎风格式和Quick迎风格式,扩散项采用二阶中心差分格式.

② 求解下一步速度 $\mathbf{u}^{(n+1)}$, 即

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{(n+1)}, \quad (5)$$

式中: $p^{(n+1)}$ 为下一时间步的压力值. 通过解耦的压力 Poisson 方程求出, 即

$$\nabla^2 p^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (6)$$

式(6)要求压力泊松方程在区域边界上严格满足 Neumann 边界条件, 即

$$\frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{(n+1)}. \quad (7)$$

通过式(3) - (7), 将第 n 时间步的流场推进到第 $n+1$ 时间步.

分步投影法数值计算的关键在于快速求解压力 Poisson 方程. 压力泊松方程空间离散采用标准的五点差分格式, 对于 Neumann 边界条件, 在边界点处, 采用增设虚点的方法, 具体参考文献[13]. 针对离散出的大型稀疏线性方程组, 通过开源函数库 UMFPACK 将其快速求解, 在传递线性方程组的系数矩阵和右端向量时, 采用函数库 Eigen 将系数矩阵的数据结构改写优化, 大大降低了存储空间, 实现对高维线性方程组的快速求解.

2 数值方法验证

为验证数值方法的可靠性, 在一长 7 m 的水平槽道上, 接一块梳齿密封板宽为 $B = 30$ cm, 长为 $L = 50$ cm, 梳齿腔深度为 $h = 15.2$ mm, 宽度 $b = 22.5$ mm, 如图 1 所示.

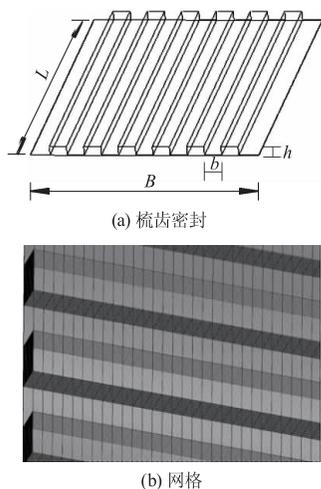


图1 梳齿密封计算模型

Fig. 1 Computational model of comb-labyrinth seal

试验间隙宽度分别取为 0.5, 1.0, 1.5 mm. 试验时通过调节槽道进口阀控制密封进口前的压力, 分

别进行 12 种不同进口压力下梳齿密封的渗漏流量测试. 同时, 建立该试验模型的数值计算模型, 对流项空间离散分别采用二阶迎风格式和 Quick 迎风格式, 数值求解渗漏流量 Q_s . 试验和数值计算结果的对比如图 2 所示, 图中 p_{in} 为进口压力. 由图可见, 试验结果和数值计算结果比较接近, 证实采用文中的数值方法研究间隙渗漏流动是可行的. 同时也可看出, 二阶迎风格式和 Quick 迎风格式计算结果相差较小, 总体上 Quick 迎风格式在计算梳齿间隙流动时更接近试验结果, 略优于二阶迎风格式. 文中计算结果采用 Quick 迎风格式.

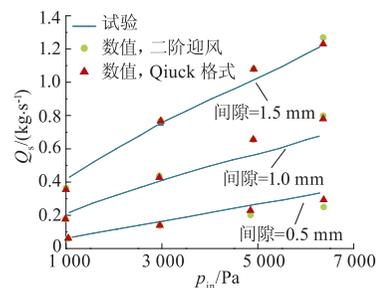


图2 数值计算与试验测量的密封渗漏量的对比

Fig. 2 Comparison of computed and experimental leakage flow rate through labyrinth seal

3 混流式水轮机梳齿密封间隙流计算

3.1 计算区域及边界条件

计算采用水轮机型号为 HLA551-LJ-43, 计算区域包括梳齿密封间隙通道(包括 3 个梳齿腔)、压力腔区域和导流管, 混流式水轮机密封间隙计算模型如图 3 所示.

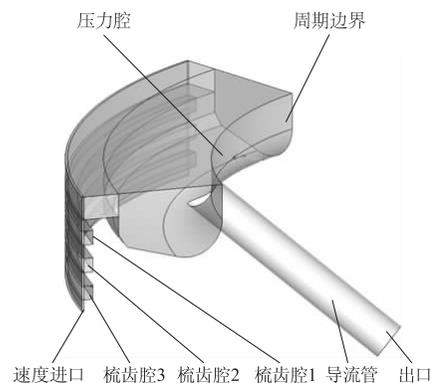


图3 混流式水轮机密封间隙计算模型

Fig. 3 Computational model of side chamber of Francis turbine

在密封间隙进口采用速度进口, 导流管末端采用自由出流, 所有壁面采用无滑移界面. 在环形均

匀分布 6 根导流管,取包括 1 根导流管在内的环向 1/6 区域作为计算区域, Y 轴为计算区域的径向对称轴, Z 轴沿水轮机转轴方向.在环向边界取为周期边界条件.整个计算区域共划分单元数 42 960 000.采用 40 个节点并行的曙光 PHPC100 个人高性能计算机实现数值计算.计算雷诺数 $Re = u_0 d / \nu$,其中 u_0 为进口速度, ν 为流体运动黏性系数, d 为密封间隙宽度,取 1 mm.

3.2 计算结果

3.2.1 间隙流道内速度分布

图 4 为间隙流道内 $Y=0$ 断面的 X 方向时间平均速度分布图.由图可见,梳齿腔内的速度分布随着雷诺数的不同而出现较大差异.在 $Re=5$ 时,梳齿腔内左下方速度为负,左上方为正,当 Re 增大到 10 时,梳齿腔内的速度分布出现 3 个条带,左上方为正,中间为斜向上的负速度条带,右下方又出现正速度条带.当 Re 增大到 50 时,梳齿腔内负速度条带出现在方腔上部,正速度条带出现在下部,与 $Re=5$ 时正、负速度条带交换位置.随着雷诺数继续增大,

速度条带分布与 $Re=50$ 时类似,只是局部速度梯度有差异.同时也可看出,当 $Re \leq 100$ 时,从下到上 3 个梳齿腔内的速度分布基本一致.而当 Re 增大至 500 时,3 个梳齿腔内的速度条带分布出现明显的差异,说明梳齿密封通过腔内旋涡耗能,会逐级降低流体的动能.

从图 4 还可看出,不同雷诺数下,压力腔体内的速度条带分布呈现明显不同的分布规律.在 $Re=5, 10$ 时,压力腔体内速度主要为负速度条带.当 $Re=50, 100$ 时,压力腔体内速度分布呈现 3 个明显的速度带,具有较高动能的流体从密封间隙流出后,直接撞击压力腔体顶盖,流体受到顶盖的约束,在压力腔内沿右下方形成强的负速度条带,直至进入导流管,与此同时,在流体撞击压力腔体顶盖的下方,形成强的旋拧涡流态,出现正的速度条带.在压力腔体的右上部大部分区域中,形成正的速度条带,流体在压力腔体内形成局部回流现象.当 $Re=500$ 时,压力腔体中的流态变得异常复杂,出现多处局部正、负速度条带分布.

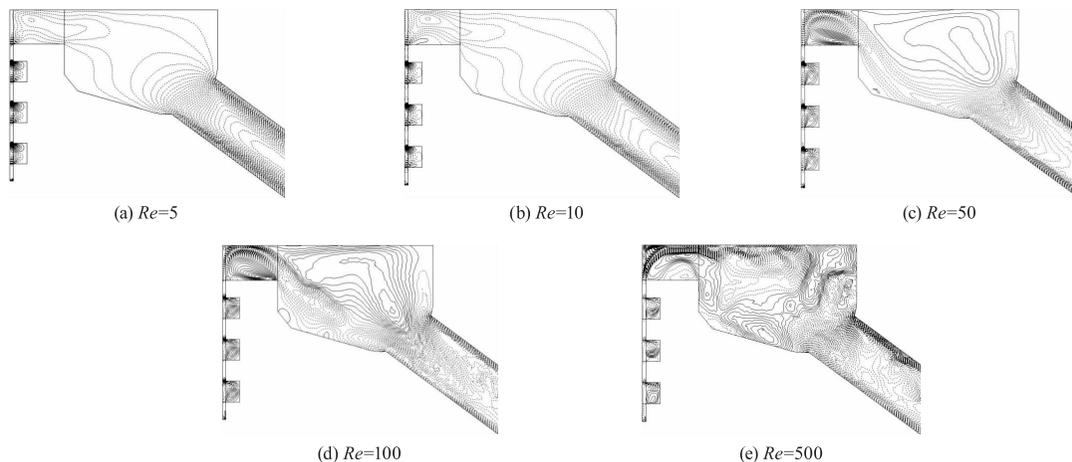


图 4 间隙流道 $Y=0$ 断面的 X 方向速度分布,图中虚线为负值,实线为正值
Fig. 4 X direction velocity contour in $Y=0$ cross-section of path of seal

3.2.2 间隙流道内流线分布

图 5 为不同雷诺数下密封间隙流道内的流线分布.由图可见,在不同雷诺数下,梳齿腔和压力腔体内在不同程度上都形成强度不同的旋涡结构,且不同雷诺数下梳齿腔体内形成的旋涡形态差异较大,旋涡占据的空间位置和旋涡中心也随雷诺数不同而发生较大变化.同时在压力腔体内出现集中的旋涡结构和二次回流现象,引起流体动力在空间上分布差异大,会直接造成腔体固体壁面受力不均,增大结构局部破坏的概率.在水力暂态过程中,随进

口雷诺数的大幅变化,梳齿腔和压力腔体内的涡结构会急剧变化,引起作用在结构上流体动力的交替大幅变化,增大结构疲劳破坏的概率.同时,旋涡结构对密封间隙渗漏和机组轴系受力平衡影响较大,因此间隙内流态的快速变化会直接影响机组在水力暂态过程中的稳定安全运行.

混流式水轮机密封间隙内的 3 个梳齿腔内时间平均的涡量见表 1.从表中可以看出, Y 方向的涡量要明显大于其他 2 个方向涡量,且随雷诺数的增大而增大.当 $Re=5, 10, 50, 100$ 时,3 个梳齿腔内 Y 方

向的涡量基本相等,当 $Re = 500$ 时,3 个梳齿腔内 Y 方向的涡量从腔体 1 到腔体 3 逐渐减小,证实 3 个

梳齿腔内流态之间的差异,与图 4 中 X 方向速度分布差异吻合.

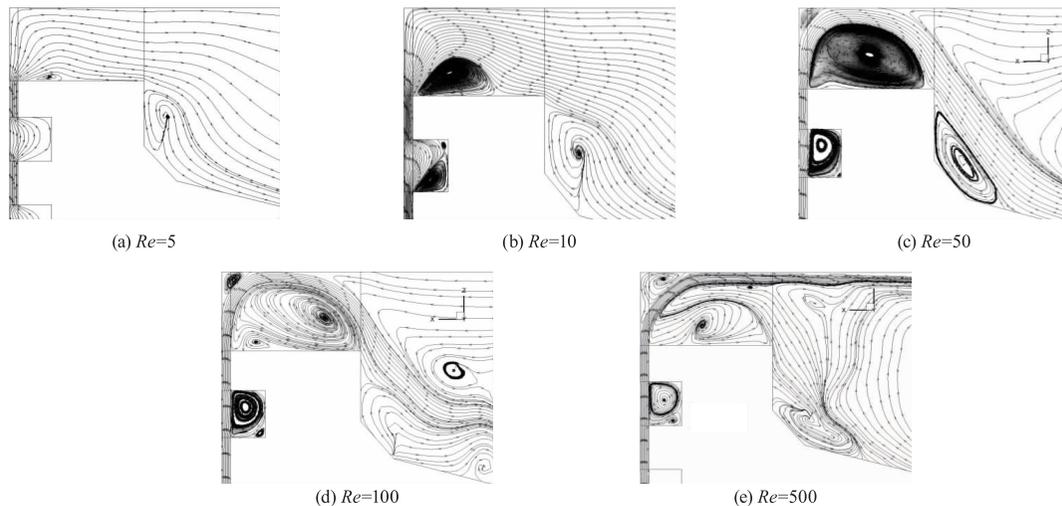


图 5 间隙流道 $Y=0$ 断面的流线
Fig. 5 Streamline in $Y=0$ cross-section of path of seal

表 1 3 个梳齿腔内时间平均的涡量图
Tab. 1 Time-averaged vorticity in three labyrinths

Re	Comb 1			Comb 2			Comb 3			s^{-1}
	ω_x	ω_y	ω_z	ω_x	ω_y	ω_z	ω_x	ω_y	ω_z	
5	-2.56×10^{-6}	-6.14×10^{-1}	-5.55×10^{-7}	-2.13×10^{-6}	-6.14×10^{-1}	2.81×10^{-6}	-4.71×10^{-6}	6.14×10^{-1}	8.68×10^{-7}	
10	-8.26×10^{-6}	-1.32	-2.21×10^{-5}	-2.11×10^{-5}	-1.32	9.34×10^{-7}	-1.37×10^{-5}	-1.32	-3.54×10^{-6}	
50	-9.57×10^{-6}	-9.38	-1.70×10^{-6}	-1.02×10^{-5}	-9.38	1.17×10^{-5}	-3.21×10^{-6}	-9.39	4.80×10^{-6}	
100	-1.49×10^{-5}	-1.65×10^1	-3.59×10^{-6}	-1.93×10^{-5}	-1.65×10^1	-6.71×10^{-6}	-3.29×10^{-5}	-1.65×10^1	-1.22×10^{-5}	
500	-2.56×10^{-3}	-5.59×10^1	-1.68×10^{-2}	-1.32×10^{-2}	-4.92×10^1	9.81×10^{-3}	4.06×10^{-3}	-4.82×10^1	-1.41×10^{-2}	

3.2.3 不同雷诺数下轴系受力

表 2 为顶盖压力 F_D 及轴向推力 F_Z 随流动雷诺数的变化.

表 2 轴系及顶盖受力
Tab. 2 Axial thrust and moment on hub and runner shaft

Re	F_Z/N	F_D/N	$\tau/(N \cdot m)$
5	0.83×10^{-3}	9.93×10^{-4}	-5.08×10^{-9}
10	2.19×10^{-3}	2.56×10^{-3}	1.28×10^{-8}
50	1.86×10^{-2}	3.36×10^{-2}	1.04×10^{-7}
100	1.08×10^{-1}	1.18×10^{-1}	1.26×10^{-6}
500	-1.87	2.24	-0.71×10^{-5}

从表 2 中可以看出,混流式水轮机密封间隙密封流动对轴系产生的推力、转轴力矩 τ 以及压力腔顶盖受力都随雷诺数的增大而增大,但由于梳齿腔和压力腔体内的流态受雷诺数的影响较大,导致受力随雷诺数出现非线性的变化,而且对轴系产生的推力和转轴力矩方向也会发生变化,如在 $Re = 500$ 时,轴系受到向下的轴向推力,而在 $Re = 5, 10, 50, 100$ 时,得到的轴向推力向上. 因此在水力暂态过程

中,随着密封间隙内流动雷诺数的变化,会引起轴系推力和转轴力矩大小和方向发生变化,从而诱发水轮机轴系的振荡.

4 结 论

文中通过试验和数值计算得到的渗漏流量结果的对比,验证数值方法可靠性. 然后数值求解得到不同流动雷诺数下某混流式水轮机间隙流道内速度及涡量的分布规律,同时得到顶盖压力、间隙流道产生的轴向推力和转轴力矩. 计算结果表明: 流体从间隙进入梳齿空腔后,形成典型的旋涡耗能结构而耗散部分动能,这种作用对降压节流起到主要作用. 同时在压力腔体内出现集中的旋涡结构和二次回流现象,流体动力在空间上分布差异大,会造成腔体壁面的受力不均,增大结构局部破坏的概率. 在水力暂态过程中,随着密封间隙内流动雷诺数的变化,会引起轴系推力和转轴力矩大小和方向发生变化,可能诱发水轮机轴系的振荡.

参考文献 (References)

- [1] 陈汇龙, 刘玉辉, 赵斌娟, 等. 基于流固耦合上游泵送机械密封的变形分析[J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2014, 35 (1): 25 - 28.
Chen Huilong, Liu Yuhui, Zhao Binjuan, et al. Deformation analysis of upstream pumping mechanical seals based on one-way fluid-solid coupling [J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition, 2014, 35 (1): 25 - 28. (in Chinese)
- [2] 王磊, 常近时. 考虑水质状况的空化流计算理论[J]. 农业机械学报, 2010, 41(3): 62 - 66.
Wang Lei, Chang Jinshi. Computational theory of cavitating flows with consideration of influence of water quality [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3): 62 - 66. (in Chinese)
- [3] Keck H, Sick M. Thirty years of numerical flow simulation in hydraulic turbomachines [J]. Acta Mechanica, 2008, 201(1/2/3/4): 211 - 229.
- [4] Wang Wenquan, Zhang Lixiang, Yan Yan, et al. Turbulent flow simulation using LES with dynamical mixed one-equation subgrid models in complex geometries [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 63(5): 600 - 621.
- [5] 李仁年, 刘殿兴, 董志强, 等. 水泵水轮机“S”形区全流道数值模拟[J]. 排灌机械工程学报, 2013, 31 (5): 401 - 405.
Li Rennian, Liu Dianxing, Dong Zhiqiang, et al. Numerical analysis of flow in pump-turbine operating in S-shape region [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2013, 31 (5): 401 - 405. (in Chinese)
- [6] 吴钢, 张克危, 戴勇峰. 转轮间隙及密封结构对混流式水电机组安全运行的影响[J]. 大电机技术, 2005 (1): 44 - 52.
Wu Gang, Zhang Kewei, Dai Yongfeng. Influences of the runner gap and seal construction on the safety in operation of Francis water power sets [J]. Large Electric Machine and Hydraulic Turbine, 2005 (1): 44 - 52. (in Chinese)
- [7] 戴勇峰, 王海, 张克危, 等. 混流可逆式转轮密封装置的泄漏量及其对机组运行的影响[J]. 水力发电学报, 2005, 24(2): 100 - 104.
Dai Yongfeng, Wang Hai, Zhang Kewei, et al. Analysis of the leakage of the Francis pump-turbine runner's sealing device and its effect on operation of the set [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2005, 24 (2): 100 - 104. (in Chinese)
- [8] 梁武科, 董彦同, 赵道利, 等. 混流式水轮机减压管对密封间隙及其周围流场的影响[J]. 水力发电学报, 2008, 27(2): 135 - 140.
Liang Wuke, Dong Yantong, Zhao Daoli, et al. The influence of relief pipes of Francis hydraulic turbine on the flow field of the sealing clearance and its environs [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2008, 27 (2): 135 - 140. (in Chinese)
- [9] 李金波, 何立东. 蜂窝密封流场旋涡能量耗散的数值研究[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27 (32): 67 - 71.
Li Jinbo, He Lidong. Energy dissipation of vortices in honeycomb seals using numerical simulation [J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27 (32): 67 - 71. (in Chinese)
- [10] 伍伟, 何立东, 俞龙, 等. 铝蜂窝密封结构设计及性能研究[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30 (17): 67 - 73.
Wu Wei, He Lidong, Yu Long, et al. Research on structure design and sealing performance of Aluminum honeycomb seals [J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30 (17): 67 - 73. (in Chinese)
- [11] 何立东, 尹德志, 李承曦, 等. 水轮机应用蜂窝密封的吸水和减振模型试验[J]. 排灌机械工程学报, 2010, 28(3): 215 - 218.
He Lidong, Yin Dezhi, Li Chengxi, et al. Simulation experiment on water pumping and vibration suppression of francis turbine applying honeycomb seals [J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2010, 28 (3): 215 - 218. (in Chinese)
- [12] 王文全, 闫妍, 张立翔. 混流式水轮机跨尺度流道内复杂湍流的数值模拟[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32 (23): 132 - 138.
Wang Wenquan, Yan Yan, Zhang Lixiang. Numerical simulation of complex turbulence in an across scale flowing passage of Francis turbine [J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32 (23): 132 - 138. (in Chinese)
- [13] 胡建伟, 汤怀民. 微分方程数值方法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2007.

(责任编辑 谈国鹏)