基于B样条的水泵复杂特性曲线拟合方法

张 林，徐 辉，于永海
（河海大学，江苏 南京 210098）

摘 要：为适应水泵复杂特性曲线中存在大挠度和非等距测点的情况，探索了基于三次均匀B样条的曲线拟合方法。通过局部预测的方法引入新的型值点以克服曲线尖点拟合的困难。根据离散数据点连线的几何形状进行分段，基于最小二乘法分步优化节点的横坐标和纵坐标，得到了最优逼近的B样条拟合曲线。通过实例计算表明，该方法可以高精度地将全区域范围的水泵试验数据拟合成光滑的特性曲线，并能够消除因试验随机误差所引起的曲线扰动。

关键词：特性曲线；水泵；B样条；曲线拟合
中图分类号：TH311；TB11 **文献标识码**：A **文章编号**：1005－6254(2007)01－0050－04

Fitting method for pump complex characteristic curve based on B-spline

ZHANG Lin, XU Hui, YU Yong-hai
(Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: A fitting method for pump complex characteristic curve with large deflections and non-equidistant data points based on cubic uniform B-spline is presented. New virtual data points are introduced when any spire point is detected in the curve, which is divided into several sections with simple shapes. The optimal knots ordinates and abscissas within the specified distribution ranges are searched employing sequential optimization method in the least square sense. It is proved in the examples that the new method works well in precisely building the pump test data in wide area into smooth curve without disturbance caused by the random test error.

Key words: characteristic curve; pump; B-spline; curve fitting

水泵的各种特性曲线的获得主要依靠从试验中获得离散试验数据，再利用最小二乘法将其拟合为曲线。水泵正常运用区段的特性曲线形状一般较为简单，一般采用多项式曲线拟合即可，但当计算过渡过程等研究需要使用全区域的形状复杂的水泵特性曲线，或者特性曲线中存在近似间断时，采用多项式曲线拟合会产生过多的摆动和几何形状不易控制的问题，即所谓的龙格现象。在没有理论或经验公式的条件下，采用样条函数进行数据拟合是比较理想的选择，一般采用三次插值样条函数，但样条函数是从集中载荷下均匀弹性细梁的小挠度变形原理导出，适应于小挠度曲线，且比较适合于等间距测点的曲线，不能适应测点间距差异较大且存在大挠度情况的复杂特性曲线形状[1]。

文献[2]中提出了基于参数化三次均匀B样条的拟合方法，通过对节点纵坐标的优化能够很好地完成水泵效率特性曲线的拟合。作者发展了该方法，通过分步优化节点的纵坐标和横坐标，提高了对形状复杂曲线的拟合精度，并通过局部预测的方法在曲线尖点附近引入新的型值点，解决了曲线中近

收稿日期：2006－09－22
基金项目：水利部南水北调规划计划项目(2005175)
作者简介：张 林(1974－)，男，山东烟台人，博士，主要从事水电站、泵站工程方面的研究。
徐 辉(1961－)，男，江苏东台人，教授，博士，博导，主要从事水电站、泵站工程方面的研究。

万方数据

似间断部分的拟合困难。提出的方法能够很好地适应水泵复杂特性曲线中的不等距测点和大挠度情况。

1　水泵特性曲线拟合的 B 样条方法

B 样条函数源于对间断的磨光[3,4]，其对大挠度问题具有很好的适应性，后因其应用于几何外形描述具有易于局部修改，形状控制灵活和简明直观的优点，在计算机辅助几何设计(CAGD)学科中获得了广泛应用和飞速发展。利用 CAGD 中的参数化均匀三次 B 样条方法来描述水泵的复杂特性曲线几何形状，这相当于对水泵离散试验数据的拟合。

1.1　参数化的三次均匀 B 样条曲线算法

B 样条曲线根据事先确定的控制多边形轮廓进行整体逼近得到，参数形式的均匀 B 样条曲线的数学表达式为[5]：

$$\boldsymbol{p}_{i,n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{B}_{k,n}(t)\boldsymbol{V}_{i+k}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1,\ i = 0,1,2,\cdots\cdots,m \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{B}_{k,n}(t) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j \boldsymbol{C}_{n+1}^{j}(t+n-k-j)^n$$

$$t \in [0,1],\ k = 0,1,2,\cdots\cdots,n \qquad (2)$$

式中 $\boldsymbol{p}_{i,n}(t)$ 表示第 i 段 n 次 B 样条曲线上点的坐标 $(x(t), y(t))$，$\boldsymbol{B}_{k,n}(t)$ 为 n 次 B 样条基函数，$\boldsymbol{V}_{i+k}$ 为控制多边形的顶点，称为 B 样条曲线的控制顶点(vertex)，每段 B 样条曲线仅与相邻的 $n+1$ 个控制顶点相关。如果给定 $m+n+1$ 个控制顶点 $V_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m+n)$，则可定义 $m+1$ 段 n 次的参数曲线，每段曲线的端点($t = 0,1$) 称为节点(knot)，连接全部曲线段所组成的整条曲线称为 n 次 B 样条曲线。可以证明，B 样条曲线具有 $n-1$ 阶几何连续性。

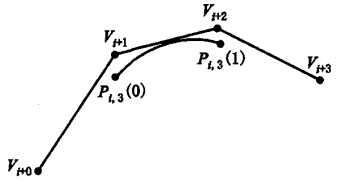


图 1　三次均匀 B 样条曲线

如图 1 所示的三次 B 样条曲线因具有二阶几何连续性同时计算比较简单而获得广泛应用，写成矩阵形式为：

$$\boldsymbol{p}_{i,3}(t) = \sum_{k=0}^{3}\boldsymbol{B}_{k,3}(t)\boldsymbol{V}_{i+k} = \frac{1}{6}[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \times \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i+0} \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

1.2　B 样条曲线反求顶点算法

由 n 个顶点定义的完整的三次 B 样条曲线是由 $n-3$ 段分段曲线连接而成的，在节点处具有二阶几何连续性。在相邻两段 B 样条曲线的衔接点处有 $p_{i,3}(1) = p_{i+1,3}(0)$，所以曲线上的节点可以只用每一段上 $t = 0$ 的节点来表示，记 $K_i = p_{i,3}(0)$，则有

$$K_i = \frac{1}{6}(V_{i+0} + 4V_{i+1} + V_{i+2})$$

$$i = 0,1,2,\cdots\cdots n-3 \qquad (4)$$

如果已知 B 样条曲线的 $n-2$ 个节点 $K_i(i = 0,1,2,\cdots\cdots n-3)$，计算通过所有 K_i 的 B 样条曲线的 n 个控制顶点 $V_i(i = 0,1,2,\cdots\cdots n-1)$，显然条件不够充分，还需要补充两个边界条件，通常采用重顶点法，即增加边界条件

$$\begin{cases} V_0 = V_1 \\ V_{n-1} = V_{n-2} \end{cases} \qquad (5)$$

将方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{K} = \frac{1}{6}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$，即

$$\begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \\ \vdots \\ K_{n-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为不可约弱对角占优阵，其必有逆矩阵，所以可以从节点反求出 B 样条曲线的控制顶点，

$$\boldsymbol{V} = 6\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{K} \qquad (7)$$

1.3　B 样条曲线最佳逼近的分布步优化算法

拟合形状复杂曲线的较好办法是根据离散数据点连线的几何形状将其分成形状简单的几段，每段都在最小二乘意义下用 B 样条曲线进行逼近以消除试验随机误差引起的曲线扰动，同时 B 样条方法可以自动保证各段之间的光滑连接。具体算法为根据分段情况确定出节点分布的区间范围，对节点进行优化计算，得出最优的节点位置，利用式(7) 和式(3) 就可以得到一条离散数据点的最佳逼近曲线。观察水泵试验数据可以发现，其横坐标变量一般成单调关系，仅根据离散数据点的横坐标位置就能容易地确定出其所依赖的节点和控制顶点，这就为我们对横坐标和纵坐标分别进行运算提供了可能。

万方数据

记试验中得到一组离散数据点 P_i 为(P_x, P_y)，相应的逼近点记为(p_x, p_y)，其中 $p_x = P_x$，B样条曲线的节点记为(K_x, K_y)。根据横坐标的位置，各离散数据点对控制顶点的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以求得，$\boldsymbol{C}$ 为 K_x 的函数

$$p_x = \boldsymbol{C}V_x = 6\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}K_x \tag{8}$$

相应地有

$$p_y = \boldsymbol{C}V_y = 6\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}K_y \tag{9}$$

则离散数据点拟合的残差平方和为

$$f(K_x,K_y) = (P_y - p_y)^{\mathrm{T}}(P_y - p_y) = 36\boldsymbol{K}_y^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}]K_y - 12\boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}K_y + \boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}P_y \tag{10}$$

这就把问题转化为最优化问题，即求解 $\tilde{K}_x$, $\tilde{K}_y$，使得

$$f(\tilde{K}_x, \tilde{K}_y) = \min(K_x, K_y) \tag{11}$$

非线性优化问题式(11)需要在空间 R^{n-2} 中分别搜索 K_x, K_y 的最优解，算法实现比较困难。注意到式(11)对 K_y 为相对简单的二次优化问题，能够得出最优解析解，所以可以进行分步优化计算[6]。先对 K_y 进行优化，求偏导 $\partial f/\partial K_y = 0$，可得

$$K_y = \frac{1}{6}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}P_y \tag{12}$$

将式(12)代入式(10)可得

$$f(K_x) = -\boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}P_y + \boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}P_y = \boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}P_y \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$。这样，式(11)的优化问题得到简化，转化为求解 $\tilde{K}_x$，使得

$$f(\tilde{K}_x) = \min f(K_x) \tag{14}$$

式(14)为一般的多变量的非线性优化问题，有多种算法可以求解，采用简单的模式搜索法[7]即可。非线性优化问题一般难以确定得到全局最优解，可以将估计的节点分布范围作为约束条件附加到优化问题中，限制解的搜索范围，这就构成仅有参数约束的非线性优化问题：

$$\begin{cases}\min f(K_x) = \boldsymbol{P}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}P_y \\ \text{sub. to} \quad b_1 \leqslant K_x \leqslant b_2\end{cases} \tag{15}$$

从式(15)中解出 $\tilde{K}_x$，利用式(3)，(7)，(8)，(12)，也就确定出最佳逼近的B样条曲线。

2 曲线中尖点的处理

当水泵处于不稳定工作区域时，表现为特性曲线中形成近似间断的几何形状，当间断附近的测试数据点相对较少时，曲线就会形成尖点。采用样条拟合时，曲线一般需要在尖点附近分段，这时如果仍以离散数据点的残差为依据来拟合曲线，就难以控制曲线的几何形状。解决办法是先对尖点附近的曲线局部形状进行预测，增加新的型值点，再通过整体曲线逼近进行校正。

可以通过离散数据点之间线段的转角来判断尖点，如果 $P_{i-1}P_i$ 和 P_iP_{i+1} 之间的转角大于90°，则认为 P_i 是尖点应该进行预测校正处理。

预测的过程相当于对尖点进行磨光处理，磨光宽度越窄，则磨光曲线越接近于尖点附近的折线形状[3,4]。将控制顶点置于离散数据点的线段上，其位置依赖于离散点线段的斜率 k。因为 $-\infty < k < +\infty$ 时，为使得计算顺利进行，需要控制 k 的使用范围。这里将 $|k|$ 的使用范围控制在1～8之间。记 $P_{i-1}P_i$ 线段的斜率为 $k_{i-1,i}$，P_iP_{i+1} 线段的斜率为 $k_{i,i+1}$，以 $P_i - (P_i - P_{i-1})/\min(\max(|k_{i-1,i}|,1),8)$，$P_i$，$P_i$，$P_i + (P_{i+1} - P_i)/\min(\max(|k_{i-1,i}|,1),8)$，为控制顶点形成三次B样条曲线，取样条曲线的节点为新的型值点，即形成新的离散数据点 …，P_{i-1}，P_i^{-1}，P_i，P_i^{I}，P_{i+1}，…，根据式(4)可得

$$\begin{cases}P_i^{-1} = P_i - \dfrac{P_i - P_{i-1}}{6\min(\max(|K_{i-1,i}|,1),8)} \\ P_i^{\mathrm{I}} = P_i + \dfrac{P_{i+1} + P_i}{6\min(\max(|K_{i-1,i}|,1),8)}\end{cases} \tag{16}$$

可见，P_i^{-1}，P_i^{I} 总是落在 $P_{i-1}P_i$ 和 P_iP_{i+1} 线段上，起到对 P_i 附近曲线几何形状进行保凸逼近的作用。另外还可以通过型值盈亏修改的方法[4]来不断提高曲线对尖点的逼近精度。

3 算例及分析

水泵的能量特性一般以流量效率曲线表示，可用区段的流量效率曲线通常呈曲率变化较为平缓的单峰形状。图2为采用本文方法分3段对某模型轴流泵流量效率试验数据进行曲线拟合的结果。$\eta \sim Q$ 曲线形状渐变，不存在间断和尖点，曲线比较容易拟合。本文方法较文献[2]中的方法增加了对节点横坐标的优化，所以对于同样的问题，拟合精度也相对提高，该曲线的拟合平均残差为0.18%。

离心泵的汽蚀特性一般以扬程汽蚀余量曲线表示，因离心泵的汽蚀是突然发生的，在曲线上表现为在临界汽蚀余量附近形成近似间断形状的不稳定区段。一般的多项式方法较难拟合间断形状的曲线，文献[8,9]分别选用了指数函数和有理分式函数作为拟合函数，文献[10]则通过优化选取分段点，选用

万方数据

直线和抛物线进行分段拟合，适合于试验点呈单调规律的汽蚀曲线拟合。本文方法则更具有灵活性，对曲线几何形状具有很好的适应性。图 3 为采用本文方法分 3 段对某离心泵的扬程与汽蚀余量试验数据[8,9] 进行曲线拟合的结果，可见拟合曲线很好地适应了间断形状，在没有剔除任何试验点情况下的拟合平均相对偏差为 0.39%。

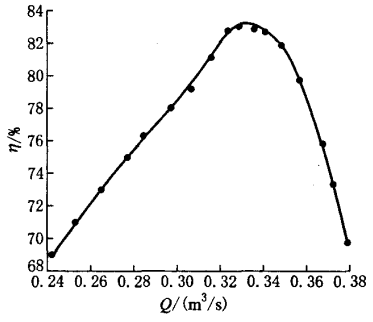


图 2　$\eta - Q$ 曲线拟合结果

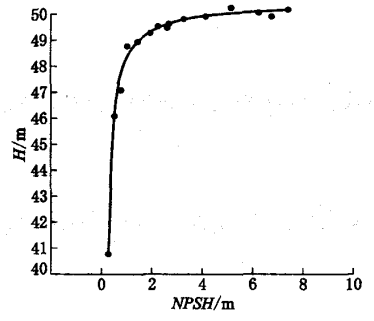


图 3　$H - NPSH$ 曲线拟合结果

轴流泵模型性能试验一般要求其试验区段包含不稳定工作的马鞍形区，并测定零流量工况下的扬程。图 4 为采用本文方法分 8 段对某模型轴流泵流量扬程试验数据进行曲线拟合的结果。拟合区段包含了水泵的不稳定工作区段，且该区段的测点较少，曲线在马鞍区附近形状急变，形成尖点，拟合过程中对尖点进行了预测校正处理。该曲线的拟合平均相对偏差为 0.58%，考虑到没有剔除任何试验点，且偏差主要来自于不稳定工作区域，这一结果可以接受。

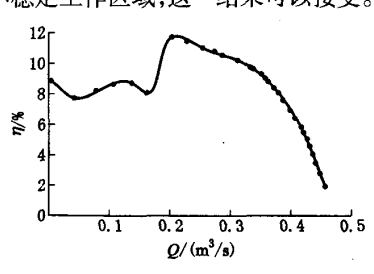


图 4　$H - Q$ 曲线的拟合结果

本文方法中需要事先根据离散数据点连线的几何形状将其分成形状简单的几段，并预先估计节点的范围。分段和离散点数据之间的间距无关，仅依赖于曲线的几何形状，一般每小段曲线至多有一个拐点。

4　结　语

（1）探索了将 B 样条方法应用于水泵复杂特性曲线的拟合，通过局部预测的方法引入新的型值点以克服曲线尖点拟合的困难，根据离散数据点连线的几何形状进行分段，在最小二乘意义下分步优化节点的横坐标和纵坐标，得到了最佳逼近的 B 样条拟合曲线。

（2）通过对水泵效率与流量曲线、扬程与汽蚀余量曲线、全区域的扬程与流量曲线的实例计算说明，采用本文方法能够适应非等距测点和大挠度曲线的情况，可以高精度地将全区域范围的水泵试验数据拟合成光滑的特性曲线，同时能够消除因试验随机误差所引起的曲线扰动。

（3）本文方法不仅适用于水泵的复杂特性曲线的拟合，对其他如水轮机、发动机等动力机械的特性曲线拟合也会有较好的效果。

参考文献(References)

[1] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京：科学出版社，2000：32－42.

[2] 张　林，于永海，姜晓明. 基于 B 样条的水泵效率特性曲线拟合方法[J]. 排灌机械，2006，24（3）：9－11.

[3] 李岳生，齐东旭. 样条函数方法[M]. 北京：科学出版社，1979：25－57.

[4] 黄友谦，李岳生. 数值逼近[M]. 北京：高等教育出版社，1987：76－114.

[5] 陆润民. 计算机图形学教程[M]. 北京：清华大学出版社，2003：119－124.

[6] 郭军海. 基于最优节点样条逼近的观测数据平滑方法[J]. 中国空间科学技术，2000（3）：43－48.

[7] 陈宝林. 最优化理论与方法[M]. 北京：清华大学出版社，1989：397－403.

[8] 刘正英. 水泵汽蚀试验曲线的一种拟合方法[J]. 排灌机械，1996，14(4)：29－32.

[9] 王玉昆，赵林明. 拟合水泵汽蚀试验数据的一种新方法[J]. 中国农村水利水电，1998（6）：20－21.

[10] 唐　平，李金伴，张荣标. 基于遗传算法的泵汽蚀试验数据拟合[J]. 排灌机械，2002，20（1）：37－39.

（责任编辑　贾国方）

万方数据