荷电流体 k-ε 双方程湍流模型的建立

王军锋，陈燕，沙毅，罗惕乾
（江苏大学能源与动力工程学院，江苏 镇江 212013）

摘　要：由于电场和流场的脉动耦合，荷电流体的湍流运动十分复杂。在建立瞬态荷电流体微分方程的基础上，采用周培源的湍流模式理论，推导了荷电流体的单相 k-ε 模型方程，该模型方程考虑了电场和流场湍流脉动的耦合作用，为建立荷电颗粒拟流体的多相湍流模型奠定了基础。

关键词：荷电；湍流；电场
中图分类号：O359.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-6254(2003)05-0043-03

0　引言

在荷电喷雾射流中，存在电场与流场间的相互耦合作用，荷电流体的湍动将引起电场的脉动，从而使流体的受力情况发生改变，流动情况极为复杂。随着荷电喷雾在工程领域的应用范围日益扩大，用单相射流或经验速度分布为基础的积分近似法，引入半径的射流宽度增长率（卷吸律或掺混率），回避对湍流特性处理的研究方法已不能满足设计的需要[1]。

20世纪80年代，周力行[2][3]等建立了颗粒拟流体的双流体湍流模型，并在工程设计和研究中逐渐应用，取得了较好的模拟效果，完善了多相湍流模式理论。颗粒拟流体的湍流模型考虑了相间滑移、扩散的耦合作用及相内作用，颗粒相有自身的对流扩散特性，是较为完整和严格的两相湍流描述方法。要建立较完整的描述荷电两相湍流的模型方程关键是模型中要体现流场与电场的脉动耦合作用。同建立颗粒拟流体的湍流模型方程相同，荷电颗粒拟流体模型方程的建立需要参照单相湍流的模拟方法，所不同的是该单相湍流模型方程中应考虑流场与电场的耦合作用。为此本文建立了荷电流体的 k-ε 双方程模型，为进一步建立荷电颗粒拟流体的多相湍流模型奠定基础。

1　荷电流体瞬时微分方程

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)=0 \tag{1}$$

考虑电场力的作用，建立荷电流体 Navier-Stokes方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)+\rho g_i-q_i\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{2}$$

q_i——单位质量流体所带的电量。

2　湍流的时均化处理

以通用变量 φ 表示湍流场中各变量瞬时值，则其时均值定义为

$$\bar{\varphi}=\lim_{T}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

其中 T 大大超过湍流脉动周期，同时又远小于流动宏观变化周期。脉动值定义为

$$\varphi'=\varphi-\bar{\varphi}$$

则 $\varphi=\bar{\varphi}+\varphi'$，$\overline{\varphi'}=0$，$\bar{\bar{\varphi}}=\bar{\varphi}$，$\overline{\bar{\varphi}\varphi'}=0$，$\overline{\varphi'\psi'}\neq 0$

方程（1）和（2）组成了荷电流体的瞬时守恒方程组，忽略密度脉动（$\rho'=0$），对其进行Reynolds展开，得到Reynolds时均方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\bar{v}_j)=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{v}_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\bar{v}_j\bar{v}_i)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v_j'v_i'})-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right)\right]+\rho g_i-\bar{q}_i\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i} \tag{5}$$

基金项目：国家自然科学基金资助项目（59776028）；江苏大学高级人才基金资助项目（JDG2003016）。
作者简介：王军锋（1975－），男，山东烟台人，博士，主要从事荷电两相流理论及应用研究。

(5)式中出现的二阶关联项，$-\rho\overline{v_i'v_j'}$，即为Reynolds应力，根据周培源湍流理论的处理方法，写出Reynolds应力的输运方程，具体方法参阅文献[2，4]。

推导中浮力项按Boussinesq近似为$\rho g_i \beta \Delta T$，获得Reynolds应力输运方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{v_i'v_j'})+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{v_k}\,\overline{v_i'v_j'})=$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}[\rho\overline{v_i'v_j'v_k'}+(\overline{p'v_i'})\delta_{ik}+(\overline{p'v_i'})\delta_{jk}-\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{v_i'v_j'}]-$$
$$\rho(\overline{v_i'v_k'}\frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_k}+\overline{v_j'v_k'}\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_k})-\beta\rho(g_i\overline{v_j'T'}+g_j\overline{v_i'T'})-$$
$$2\mu(\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v_j'}{\partial x_k}})+\overline{p'(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j'}{\partial x_i})}-\overline{q_i}(\overline{\frac{\partial V'}{\partial x_i}v_j'}+\overline{\frac{\partial V'}{\partial x_j}v_i'}) \tag{6}$$

方程右端各项依次为扩散项、剪力产生项、浮力产生项、粘性耗散项、压强应变项和电场力应变项。

3 k-ε方程的推导

根据湍动能的定义：

$$k=\frac{1}{2}\overline{v_i'v_i'}=\frac{1}{2}\overline{v_i'^2}=\frac{1}{2}(v_1'^2+v_2'^2+v_3'^2)$$

由Reynolds应力输运方程(6)取$i=j$，并忽略其中的压力应变项，得到湍能k的控制方程的精确形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{v_k}k)=\frac{\partial}{\partial x_k}(-\rho\frac{\overline{v_k'v_i'^2}}{2}-\rho\overline{p'v_k'})+$$
$$\mu\frac{\partial k}{\partial x_k}-\rho\overline{v_i'v_k'}\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_k}+\beta\rho g_i\overline{v_i'T'}-\mu\overline{(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k})^2}-2\overline{q_i}(\overline{\frac{\partial V'}{\partial x_i}v_i'}) \tag{7}$$

k方程中的各项依次为，瞬变项、对流项C_k、扩散项D_k、剪力产生项G_k、耗散项ε、浮力项G_b、电场作用项E_k。即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+C_k=D_k+G_B+\rho_\varepsilon+G_k+E_k \tag{8}$$

上式中电场作用项E_k体现了湍流脉动引起电场脉动对湍动能造成的影响。对湍能k控制方程的各项依次进行模拟：

扩散项中，忽略分子输运，压力脉动和速度脉动作用综合在一起，用“梯度模拟假定”进行模拟，即

$$-\rho\overline{v_k'(\frac{v_i'^2}{2}+p')}+\mu\frac{\partial k}{\partial x_k}=\frac{\mu_T+\mu}{\sigma_k}+\frac{\partial k}{\partial x_k} \tag{9}$$

式中 μ_T是湍流粘性系数；σ_k为k的湍流Prandtl数

剪力产生项将雷诺应力用湍流粘性系数和时均流梯度表示写成

$$-\rho\overline{v_i'v_k'}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\mu_T(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k})\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{10}$$

对耗散项按量纲分析，$\varepsilon\propto k^a l^b$，引入比例常数$C_D$可得

$$\varepsilon=C_D k^{\frac{3}{2}}/l \tag{11}$$

因此
$$-\mu\overline{(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k})^2}=-C_D\rho\cdot k^{\frac{3}{2}}/l \tag{12}$$

浮力产生项也采用梯度模拟

$$-\beta\rho g_i\overline{v_i'T'}=\beta g_k\Gamma_T\frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{13}$$

式中湍能交换系数 $\Gamma_T=\mu_T/\sigma_T$，σ_T为T的湍流Prandtl数。对电场作用关联项项也采用梯度模拟方法，引入电场湍动能交换系数$\Gamma_E=\mu_T/\sigma_E$，σ_E为电场脉动交换系数

电场作用项

$$-2q_i(\overline{\frac{\partial V'}{\partial x_i}v_i'})=-2q_i\cdot\Gamma_E\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^{\,2}} \tag{14}$$

模拟后的k方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k k)=\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\mu+\mu_T}{\sigma_k}\cdot\frac{\partial k}{\partial x_k})+$$
$$G_k+G_b-C_D\rho k^{\frac{3}{2}}/l+E_k \tag{15}$$

其中$\mu_T=C_\mu\rho k^{\frac{1}{2}}l$(根据kolmogorov和prandtle单方程模型)

$$G_k=\mu_T(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i})\frac{\partial v_i}{\partial x_k};$$
$$G_b=-\beta g_k\Gamma_T\frac{\partial T}{\partial x_k};$$
$$E_k=-2q_i\Gamma_E\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}$$

将湍动能的耗散率ε作为待求解量，从N-S方程出发，具体方法参阅文献[2，4]，建立ε的控制方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k\varepsilon)=-\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{v_k'\varepsilon})+\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k})$$

$$-2\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_j'}{\partial x_k}}-\overline{2(v\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_k\partial x_j})^2}-2\overline{q_i}\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial x_k\cdot\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{16}$$

方程各项分别为瞬变项、对流项、湍流扩散项、分子扩散项、产生项(涡旋拉伸)粘性耗散项与电场作用项。

为了封闭 ε 方程，仿照 k 方程中模拟方法，对扩散项采用梯度模拟，即取

$$-\rho\overline{v_k'\varepsilon'}=\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}=\Gamma_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}$$

湍流交换系数 $\Gamma_\varepsilon=\mu_T/\sigma_\varepsilon;\sigma_\varepsilon$ 是 ε 的湍流 Prandtl 数。

考虑到 ε 控制方程中应当有 ε 的源和汇，以保证随着 k 的产生率的增加，ε 也相应增加，避免 k 会无限制增加，也保证 k 衰减时，ε 迅速下降，避免 k 方程出现不合理的负值。即设 ε 的产生和耗散正比于 k 的产生和耗散，$\frac{S_\varepsilon}{S_k}\sim\frac{\varepsilon}{k}$ 根据量纲分析和尽可能简化的原则，得到 ε 方程的源项

$$S_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{k}(C_1G_k-C_2\rho+C_2\cdot E_k)$$

因此模拟后的 ε 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k})+\frac{\varepsilon}{k}(C_1G_R-C_2\rho\varepsilon+C_2E_k) \tag{17}$$

4　结论

根据周培源的湍流模式理论推导的荷电流体双方程模型考虑了流场和电场的脉动耦合作用，关联项通过引入电场湍能交换系数和电场梯度进行模拟加以封闭，为荷电颗粒拟流体多相湍流模型方程的建立奠定了基础。

参考文献：

[1]　王军锋. 燃油静电喷雾及荷电两相湍流射流的研究[D]. 镇江：江苏大学, 2002.

[2]　周力行. 湍流两相流动与燃烧的数值模拟[M]. 北京：清华大学出版社, 1989.

[3]　周力行. 湍流气粒多相流数值模拟理论的最近进展[J]. 燃烧科学与技术. 1995, 1(1):10 ~ 15.

[4]　范维澄, 万跃鹏. 流动及燃烧的模型与计算[M]. 1992.

k-ε Two Equation Turbulence Model of Charged Liquid Flow

WANG Jun-feng, CHEN Yan, SHA Yi, LUO Ti-qian

(School of Energy Resources and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

Abstract: According to Zhou Peiyuan's turbulence model theory, this paper presented the conservation equation of charged liquid and set up a kind of single-phase $k-\varepsilon$ two equations model of charged liquid flow. This model considered the coupling action between fluid flow field and electric field and provided a basic for the establishment of charged particle pseudo-field multiphase turbulence model.

Key words: Charged liquid; Turbulence model; Electric field

会　议　通　知

中国农机学会排灌机械学会和中国农机工业协会排灌机械分会联合召开的“2003 年全国排灌机械学术研讨会暨中国农机工业学会排灌机械分会会员大会”、“中国农机学会排灌机械学会学术年会”定于 2003 年 11 月 14 日至 17 日在浙江温岭市召开，具体日程和要求详见会议通知，届时请有关企业、领导、会员光临。

中国农机学会排灌机械学会　中国农机工业协会排灌机械分会