

doi:10.3969/j.issn.1674-8530.16.0219



## 基于格子 Boltzmann 方法饱和土体 一维固结数值解

王志良<sup>1</sup>, 辛立斌<sup>1</sup>, 申林方<sup>1</sup>, 李明宇<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学建筑工程学院, 云南 昆明 650500; 2. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450001)



王志良

**摘要:** 针对饱和土体的 Terzaghi 一维固结问题, 基于 D1Q2 离散速度模型, 推导出各离散速度方向上的平衡态分布函数, 同时采用 BGK 近似处理 Boltzmann 方程的碰撞项, 建立了在时间、空间上离散的格子 Boltzmann 模型. 然后采用 Chapman-Enskog 多尺度展开技术和 Taylor 公式级数展开方法, 将微观的格子 Boltzmann 模型还原为宏观的一维固结微分方程. 为便于分析, 对饱和土体的一维固结方程进行了量纲一化处理, 并建立了实际物理单位与格子单位之间的转化关系. 最后基于格子 Boltzmann 方法采用 Visual C++ 语言编制了相应的计算程序, 分别计算了单面排水和双面排水情况下, 不同时步饱和土体中超孔隙水压力的分布情况, 并将相应的数值计算结果与经典的解析解进行了分析对比. 研究表明: 该方法的数值解与理论解的吻合程度较好, 验证了格子 Boltzmann 方法在计算饱和土体一维固结问题方面的有效性.

**关键词:** 饱和土体; 格子 Boltzmann 方法; 一维固结; 数值解

**中图分类号:** TU44; S277.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-8530(2017)10-0874-07

王志良, 辛立斌, 申林方, 等. 基于格子 Boltzmann 方法饱和土体一维固结数值解[J]. 排灌机械工程学报, 2017, 35(10): 874-880.  
WANG Zhiliang, XIN Libin, SHEN Linfang, et al. Numerical solution of one-dimensional consolidation for saturated soil based on lattice Boltzmann method[J]. Journal of drainage and irrigation machinery engineering (JDIME), 2017, 35(10): 874-880. (in Chinese)

## Numerical solution of one-dimensional consolidation for saturated soil based on lattice Boltzmann method

WANG Zhiliang<sup>1</sup>, XIN Libin<sup>1</sup>, SHEN Linfang<sup>1</sup>, LI Mingyu<sup>2</sup>(1. Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650500, China;  
2. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

**Abstract:** In order to study one-dimensional Terzaghi consolidation theory for saturated soil, the equilibrium distribution function of discrete velocity direction is derived based on D1Q2 model. At the same time, the lattice Boltzmann model with discrete time and space is established by applying the BGK approximation to deal with collision term of the Boltzmann equation. Then the microscopic lattice Boltzmann model is reduced to the macroscopic one-dimensional consolidation differential equation by using Chapman-Enskog multi-scale expansion technique and Taylor formula series expansion method. To make the analysis convenient, the dimensionless method is used to deal with the one-dimensional consolidation equation for saturated soil. The transformation between the physical unit and the lattice one is constructed. Finally, according to lattice Boltzmann method, the corresponding calculation pro-

收稿日期: 2016-09-19; 修回日期: 2016-10-29; 网络出版时间: 2017-09-28

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1814.TH.20170928.1604.016.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51508253, 51668028, 51408284)

作者简介: 王志良(1982—), 男, 河北乐亭人, 副教授, 博士(wangzhiliangtj@126.com), 主要从事岩土工程渗流研究.

辛立斌(1992—), 男, 内蒙古乌拉特中旗, 硕士研究生(281042246@qq.com), 主要从事流固耦合作用研究.

gram is compiled with visual C++ language, at the different time steps the distribution of excess pore water pressure for saturated soil is calculated in case of one side and both sides drainage. The numerical results are compared with the classical analytical solutions. The results show that the numerical solution of this method is in good agreement with the theoretical solution. The effectiveness of lattice Boltzmann method is verified in the application of one-dimensional consolidation for saturated soil.

**Key words:** saturated soil; lattice Boltzmann method; one-dimensional consolidation; numerical solution

土体的渗流固结问题广泛存在于自然界和实际工程建设中,如地基加固<sup>[1]</sup>、基坑降水<sup>[2]</sup>、盾构隧道施工<sup>[3]</sup>、填土路堤<sup>[4]</sup>等都会产生外荷载作用下土体的固结问题. 研究土体的固结理论,不仅能够解决地基沉降与时间的关系,还可以为地基的强度及稳定性等理论的发展奠定基础. 因此,土体的固结理论一直是土力学基础研究的重要课题之一.

Terzaghi 于 1925 年首次提出了有效应力原理,并建立了饱和土体的一维固结理论;1935 年 Rendulic 将其推广到二维和三维问题中. 1941 年 Biot 从连续介质力学的基本方程出发建立了较为完备的三维固结理论. 由于土体固结的二维及三维问题参数测定比较复杂,故目前一维固结理论仍被广泛应用.

随着计算机技术的快速发展,数值计算方法在研究土体固结特性方面发挥着重要的作用. 与传统的宏观数值计算方法(有限单元法、有限差分法、边界单元法等)相比,近 30 a 发展起来的格子 Boltzmann 方法是一种介于宏观连续介质理论与微观分子动力学的介观数值模拟方法. 该方法以分子动力学原理为基础,从微观粒子的分布函数出发,采用统计力学的方法推导出分布函数与实际宏观物理量间的联系. 它不需求解连续的偏微分方程,也不用去研究每个分子的运动状态,只需引入粒子的平衡态分布函数,简化格子 Boltzmann 方程的碰撞项,通过计算机模拟微观粒子迁移、碰撞运算的不断演化,求得宏观偏微分方程的数值解. 格子 Boltzmann 方法因其具有物理概念清晰、边界条件容易处理、易于程序化实施、良好的并行计算能力等特点,为偏微分方程的数值求解提供了新的研究思路<sup>[5-7]</sup>.

为此,文中以饱和土体的 Terzaghi 一维固结问题为研究对象,基于格子 Boltzmann 方法的 D1Q2 离散速度模型,选用 Maxwell 分布函数作为粒子的平衡态分布函数,根据 BGK 近似处理碰撞项,建立格子 Boltzmann 模型. 然后利用 Chapman - Enskog 多尺度技术和 Taylor 公式级数展开方法将该模型恢复为宏观的一维固结微分方程. 编制相应计算程序,分别计算饱和土体在单面排水和双面排水 2 种情况

下,土层中超孔隙水压力消散的数值解,并将计算结果与理论解析解进行分析对比,从而验证文中数值计算方法的有效性.

## 1 Terzaghi 一维固结理论

### 1.1 固结微分方程

Terzaghi 在相应假设的前提下于 1925 年提出了一维固结理论,其微分方程<sup>[8]</sup>为

$$\frac{\partial U(y,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

式中: $U(y,t)$  为  $t$  时刻深度  $y$  处的土体超孔隙水压力; $c_v$  为土体的固结系数, $c_v = \frac{k(1+e_0)}{a\gamma_w}$ ,其中  $k$  为土体的渗透系数, $e_0$  为土体的初始孔隙比, $a$  为土体的压缩系数, $\gamma_w$  为水的重度.

### 1.2 固结微分方程求解

在厚度为  $H$  的饱和土层上一次性施加无限宽的均布荷载  $q$ ,从而在土体一定深度范围内产生超孔隙水压力,土层的顶部为排水边界,底部根据土层的性质不同分为透水和不透水边界,计算模型如图 1 所示.

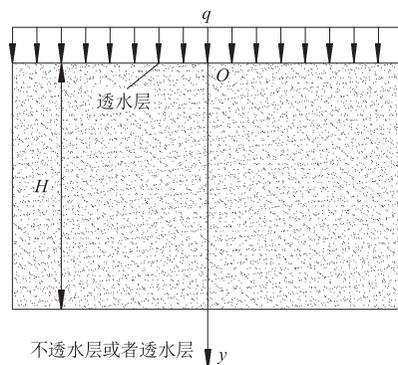


图 1 一维固结计算模型

Fig. 1 One-dimensional consolidation model

#### 1.2.1 单面排水

假设在外荷载  $q$  作用下,土体中沿深度方向产生线性变化的超孔隙水压力,土层上方产生的超孔

隙水压力为  $p_1$ , 下方为  $p_2$ , 且  $\alpha = \frac{p_1}{p_2}$ .

边界条件:

$$t=0 \text{ 时}, U(y,0) = p_2 \left[ 1 + (\alpha - 1) \frac{H-y}{H} \right],$$

$$t=\infty \text{ 时}, U(y,\infty) = 0.$$

$$\text{透水边界: } U(0,t) = 0, (0 < t \leq \infty).$$

$$\text{不透水边界: } \frac{\partial U(H,t)}{\partial t} = 0, (0 \leq t \leq \infty).$$

采用分离变量法可以求得单面排水条件下固结微分方程的解析解为

$$U(y,t) = \frac{4p_2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} [m\pi\alpha + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}(1-\alpha)] e^{-\frac{m^2\pi^2}{4}T_v} \sin \frac{m\pi y}{2H}, \quad (2)$$

式中:  $m$  为正奇数 ( $m=1, 3, 5, \dots$ );  $T_v$  为时间因数,

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2}.$$

### 1.2.2 双面排水

假设土层双面排水时土体中的超孔隙水压力与单面排水作相同取值, 由于双面排水土体中的水分从中心分别向上、下2个方向排出, 在计算时土层厚度  $H$  取为实际厚度的  $1/2$ .

边界条件:

$$t=0 \text{ 时}, U(y,0) = p_2 \left[ 1 + (\alpha - 1) \frac{H-y}{H} \right],$$

$$t=\infty \text{ 时}, U(y,\infty) = 0.$$

$$\text{透水边界: } U(0,t) = 0, (0 < t \leq \infty),$$

$$U(H,t) = 0, (0 < t \leq \infty).$$

根据相应的边界条件, 求得双面排水条件下固结微分方程的解析解为

$$U(y,t) = \frac{p_2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} [1 - (-1)^m \alpha] e^{-\frac{m^2\pi^2}{4}T_v} \sin \frac{m\pi(2H-y)}{2H}. \quad (3)$$

## 2 格子 Boltzmann 模型

### 2.1 格子 Boltzmann 方程

统计力学中用于描述非平衡态分布函数演化规律的 Boltzmann 方程<sup>[9-10]</sup>可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + a \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = \Omega_f, \quad (4)$$

式中:  $f$  为粒子速度分布函数, 可表示为  $f(r, e, t)$ ;  $e$

为粒子速度矢量;  $t$  为时间;  $r$  为粒子的空间位置矢量;  $a$  为粒子的加速度矢量, 如系统不受外力作用  $a=0$ ;  $\Omega_f$  为碰撞项, 是关于  $f$  的非线性函数.

为了求解 Boltzmann 方程, 在不影响计算结果的前提下, 通常采用简单的算子对碰撞项进行近似处理. 其中, 1954 年由 Bhatnagar、Gross 和 Krook 提出的碰撞算子模型(BGK 近似)最为常用, 它将碰撞项  $\Omega_f$  简化为  $f$  的线性函数:

$$\Omega_f = \frac{1}{\tau_0} (f^{\text{eq}} - f), \quad (5)$$

式中:  $\tau_0$  为 2 次碰撞的时间间隔, 称为弛豫时间;  $f^{\text{eq}}$  为 Maxwell 平衡态分布函数.

忽略外力的影响, 将式(5)代入式(4), 得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\tau_0} (f^{\text{eq}} - f). \quad (6)$$

假设其沿着特定的方向(离散速度方向)有效, 则在特定方向上离散后的 Boltzmann 方程为

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial r} = \frac{1}{\tau_0} (f_i^{\text{eq}} - f_i), \quad (7)$$

式中:  $e_i$  为离散的速度向量.

采用 BGK 近似的格子 Boltzmann 方程式(7)可以离散为

$$\frac{f_i(r, t + \delta_i) - f_i(r, t)}{\delta_i} + e_i \cdot \frac{f_i(r + \delta_r, t + \delta_i) - f_i(r, t + \delta_i)}{\delta_r} = \frac{1}{\tau_0} [f_i^{\text{eq}}(r, t) - f_i(r, t)], i=1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

式中:  $N$  为离散速度数量.

将式(8)进行简化处理, 并代入  $\delta_r = e_i \delta_i$ , 即可得到完全离散格子 Boltzmann 方程为

$$f_i(r + \delta_r, t + \delta t) - f_i(r, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{\text{eq}}(r, t) - f_i(r, t)], i=1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

式中:  $\tau = \frac{\tau_0}{\delta_i}$ , 为量纲一化的弛豫时间.

为便于编程计算, 通常将格子 Boltzmann 方程的演化过程分 2 步进行:

#### 1) 碰撞

$$f_i(r, t + \delta_i) - f_i(r, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{\text{eq}}(r, t) - f_i(r, t)]. \quad (10)$$

#### 2) 迁移

$$f_i(r + \delta_r, t + \delta_i) = f_i(r, t + \delta_i). \quad (11)$$

QIAN 等<sup>[11]</sup>提出的 DnQm 模型( $n$  为维数;  $m$  为离散速度数)为格子 Boltzmann 方法中的基本模型. 文中研究的问题为一维土体固结, 故选用 D1Q2 模

型进行计算,其粒子速度方向如图 2 所示. 离散速度  $e$  由 2 个方向上的速度向量构成如下的集合:

$$e = c[1, -1], \quad (12)$$

式中:  $c$  为格子速度,  $c = \frac{\delta_y}{\delta_t}$ , 其中  $\delta_y, \delta_t$  分别为离散的格子步长和时间步长.



图 2 D1Q2 格子模型  
Fig. 2 D1Q2 lattice model

假设粒子以宏观速度  $u$  在介质中运动, 则 Maxwell 平衡态分布函数可表示为

$$f^{eq} = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}(e-u)^2} = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}e^2 + 3e \cdot u - \frac{3}{2}u^2}. \quad (13)$$

将  $e^{-x}$  采用 Taylor 级数展开为

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \dots \quad (14)$$

对式(13)中的  $e^{-\frac{3}{2}(2e \cdot u - u^2)}$  项进行展开, 得

$$f^{eq} = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}e^2} \left[ 1 + 3e \cdot u - \frac{3}{2}u^2 + 9(e \cdot u)^2 + \dots \right]. \quad (15)$$

为了简化计算, 平衡态分布函数只取有限项(取至  $u^2$ ), 可采用如下一般形式表示:

$$f_i^{eq} = \varphi \omega_i [A + B e_i \cdot u + C (e_i \cdot u)^2 + D u^2], \quad (16)$$

式中:  $A, B, C, D$  为常数, 可以通过守恒定律求得;  $\omega_i$  为权系数; 对于固结方程  $\varphi$  代表超孔隙水压力  $U$ ,

$$U = \sum_{i=1}^m f_i^{eq}.$$

由于文中要求解的固结方程中, 粒子流动是停滞的, 即速度  $u = 0$ , 故式(16)可以简化为

$$f_i^{eq} = U \omega_i A. \quad (17)$$

事实证明, 当  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$  时,  $A = 1$  可以满足数值计算的要求.

对于 D1Q2 模型, 根据守恒定律:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 f_i = \sum_{i=1}^2 f_i^{eq} = U \omega_1 + U \omega_2 = U, \\ \sum_{i=1}^2 e_i f_i = \sum_{i=1}^2 e_i f_i^{eq} = c \omega_1 - c \omega_2 = U u = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^2 e_i f_i = \sum_{i=1}^2 e_i f_i^{eq} = c \omega_1 - c \omega_2 = U u = 0, \quad (19)$$

对上述方程求解, 可以得到  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ .

## 2.2 Chapman - Enskog 展开

采用 Chapman - Enskog 多尺度展开方法, 可以将格子 Boltzmann 方程式(9)还原为宏观的土体固结微分方程. 假设土体固结系数  $c_v$  为常数, 引入一个很小的参数  $\varepsilon$ , 并将  $y$  设置成  $y/\varepsilon$ , 对固结方程在空间上按比例进行缩放, 为了保证方程两边的数量级相等, 需同时将时间  $t$  设置为  $\frac{t}{\varepsilon^2}$ .

对于 D1Q2 模型, 土体固结方程的宏观超孔隙水压力可表示为

$$U(y, t) = f_1(y, t) + f_2(y, t). \quad (20)$$

假设粒子分布函数  $f_i(y, t)$  离平衡态分布函数  $f_i^{eq}$  不远, 并逐渐趋于平衡态. 故  $f_i(y, t)$  可以展开为

$$f_i = f_i^0 + \varepsilon f_i^1 + \varepsilon^2 f_i^2 + \dots, \quad (21)$$

式中:  $f_i^0$  为平衡条件下的分布函数, 即  $f_i^0 = f_i^{eq}$ .

$$U = \sum_{i=1}^2 f_i = \sum_{i=1}^2 (f_i^{eq} + \varepsilon f_i^1 + \varepsilon^2 f_i^2 + \dots). \quad (22)$$

由于  $U = \sum_{i=1}^2 f_i^{eq}$ ,  $\varepsilon$  为任意小量, 因此与  $\varepsilon$  有关的各项系数均为零, 即

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 f_i^1 = 0, \\ \sum_{i=1}^2 f_i^2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^2 f_i^2 = 0. \quad (24)$$

将系统更新后的粒子分布函数  $f_i(y + e_i \delta_t, t + \delta_t)$  采用 Taylor 级数展开, 得

$$f_i(y + e_i \delta_t, t + \delta_t) = f_i(y, t) + \frac{\partial f_i}{\partial y} e_i \delta_t + \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta_t + \frac{\delta_t^2}{2!} \left( e_i e_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + 2 e_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial y} \right) + O(\delta_t^3). \quad (25)$$

将引入参数  $\varepsilon$  的空间变量和时间变量代入式(25), 即用  $y/\varepsilon$  替换  $y$ , 得

$$f_i(y + e_i \delta_t, t + \delta_t) = f_i(y, t) + \varepsilon \frac{\partial f_i}{\partial y} e_i \delta_t + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta_t + \frac{\delta_t^2}{2!} \left( e_i e_i \frac{\varepsilon^2 \partial^2 f_i}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon^4 \partial^2 f_i}{\partial t^2} + 2 e_i \frac{\varepsilon^3 \partial^2 f_i}{\partial t \partial y} \right) + O(\delta_t^3). \quad (26)$$

将式(9), (21)代入式(26), 得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau \delta_t} (\varepsilon f_i^1 + \varepsilon^2 f_i^2 + \dots) &= \varepsilon \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial y} e_i + \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t} + \\ \varepsilon^2 \frac{\partial f_i^1}{\partial y} e_i + \frac{\delta_t}{2!} e_i e_i \frac{\varepsilon^2 \partial^2 f_i^{eq}}{\partial y^2} &+ O(\varepsilon^3) + O(\delta_t^2). \end{aligned} \quad (27)$$

由式(27)中方程两侧关于  $\varepsilon$  及  $\varepsilon^2$  项的系数分别相等,可以得到如下方程:

$$-\frac{1}{\tau\delta_i}f_i^1 = \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial y}e_i, \quad (28)$$

$$-\frac{1}{\tau}f_i^2 = \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial t} + \frac{\partial f_i^1}{\partial y}e_i + \frac{\delta_i}{2!}e_i e_i \frac{\partial^2 f_i^{\text{eq}}}{\partial y^2}. \quad (29)$$

将式(28)的两侧对  $y$  进行求导,并将其代入式(29),得

$$-\frac{1}{\tau}f_i^2 = \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial t} - \left(\tau\delta_i - \frac{\delta_i}{2}\right)\frac{\partial^2 f_i^{\text{eq}}}{\partial y^2}e_i e_i. \quad (30)$$

为了推导出土体的固结方程,对上述方程的各个粒子速度分布方向进行求和,得

$$\sum_{i=1}^2 -\frac{1}{\tau}f_i^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial t} - \left(\tau\delta_i - \frac{\delta_i}{2}\right)\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 f_i^{\text{eq}}}{\partial y^2}e_i e_i\right). \quad (31)$$

由式(23)可知:  $\sum_{i=1}^2 -\frac{1}{\tau}f_i^2 = 0$ , 而式(31)右侧的两项可分别变换为

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i^{\text{eq}}}{\partial t} = \frac{\partial \sum_{i=1}^2 f_i^{\text{eq}}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 f_i^{\text{eq}}}{\partial y^2}e_i e_i\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{i=1}^2 f_i^{\text{eq}} e_i e_i\right) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (33)$$

故式(31)可以变换为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \left(\tau\delta_i - \frac{\delta_i}{2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (34)$$

将式(34)与土体的固结方程对比,可以得出土体的固结系数  $c_v$  与格子 Boltzmann 方程的弛豫时间  $\tau$  有如下关系:

$$c_v = c^2 \delta_i \left(\tau - \frac{1}{2}\right). \quad (35)$$

### 2.3 边界条件

对于文中要求解的土体固结方程,共涉及透水边界、不透水边界和初始压力边界3类边界条件.其相应格子 Boltzmann 方法的边界可分别表示为

$$\text{透水边界: } f_1(O, t) = f_2(O, t) = 0.$$

$$\text{不透水边界: } f_1(O, t) = f_1(B, t), \\ f_2(O, t) = f_2(B, t).$$

$$\text{初始压力边界: } f_1(O, 0) + f_2(O, 0) = U_0,$$

式中:  $f_i(O, t)$ , ( $i=1, 2$ )为边界节点  $O$  上的分布函数;  $f_i(B, t)$ , ( $i=1, 2$ )为计算区域内与边界节点  $O$  相邻节点  $B$  的分布函数;  $U_0$  为初始超孔隙水压力.

### 2.4 固结方程的量纲一化及单位转换

式(1)为土体一维固结方程的量纲表达式,其中涉及的物理量及其单位有:超孔隙水压力  $U$ , 单位为 kPa; 固结系数  $c_v$ , 单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ ; 时间  $t$ , 单位为 s; 深度  $y$ , 单位为 m. 为了使计算结果更具有一般形式,控制方程常常分解为一些量纲一的参数.为此,根据固结方程物理变量,定义如下量纲一的量:

$$U_d = \frac{U - U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}, \quad (36)$$

$$y_d = \frac{y}{L}, \quad (37)$$

$$t_d = \frac{c_v t}{L^2}, \quad (38)$$

式中:  $U_{\max}$ ,  $U_{\min}$  分别为土体的最大、最小超孔隙水压力;  $U_d$ ,  $y_d$ ,  $t_d$  分别为量纲一的超孔隙水压力、排水土层深度、时间,  $U_d$  的取值范围为  $0 \sim 1.0$ ;  $L$  为系统参考长度,选为排水土层的厚度  $H$ , 则  $y_d$  取值范围为  $0 \sim 1.0$ .

将量纲一的量代入固结方程,得到其量纲一化后的形式为

$$\frac{\partial U_d}{\partial t_d} = \frac{\partial^2 U_d}{\partial y_d^2}. \quad (39)$$

在格子 Boltzmann 方法中,需要对研究区域进行网格划分并确定相应的时间步长.为了计算方便通常设定  $\delta_y = 1$ ,  $\delta_t = 1$ . 对于文中计算的一维问题,假定  $M$  为格子总数,  $c_{v1}$  为格子单位的土体固结系数,  $T$  为数值计算的总时步.根据式(38)可以得到格子单位时间的量纲一化后的形式为

$$t_d = \frac{c_{v1} T}{M^2}. \quad (40)$$

根据量纲一化后的时间相等,可以计算出物理单位固结时间相对应的格子 Boltzmann 方法计算总时步为

$$T = \frac{c_{v1} M^2}{c_{v1} L^2}. \quad (41)$$

### 3 算法的验证

为验证数值计算方法在求解饱和土体一维固结方程方面的正确性,基于格子 Boltzmann 方法,采用 Visual C++ 语言编制了计算程序,分别计算厚度为  $H$  的排水土层在单面排水和双面排水的情况下超孔隙水压力的消散规律.假设排水土层上方及下方的初始超孔隙水压力相等,即  $p_1 = p_2$ . 格子 Boltz-

mann 模型的参数分别取:时间步长  $\delta_t = 1.0$ , 纵向格子步长  $\delta_y = 1.0$ , 格子总数为  $M = 100$ , 格子单位的土体固结系数  $c_{v1} = 0.25$ .

图 3,4 分别为单面排水和双面排水条件下, 不同时步土层中超孔隙水压力分布的文中数值解与解析解的对比.

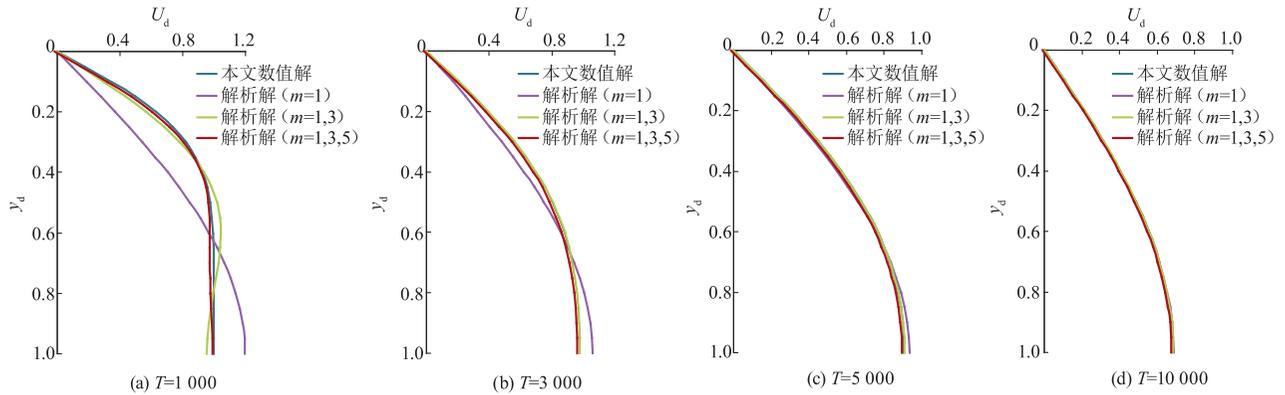


图 3 单面排水超孔隙水压力分布对比图  
Fig. 3 Comparison of excess pore water pressure distribution in one side drainage

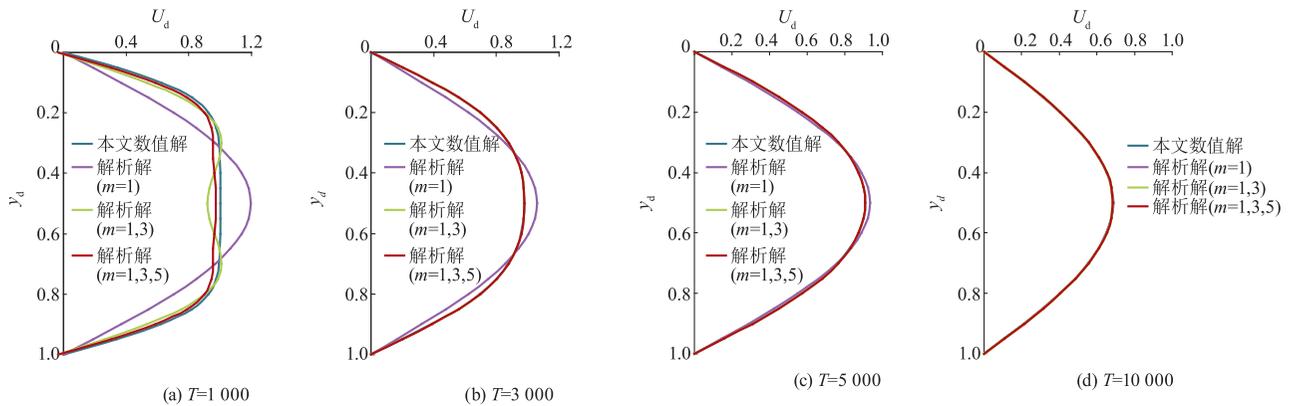


图 4 双面排水超孔隙水压力消散对比图  
Fig. 4 Comparison of excess pore water pressure distribution in both sides drainage

由于解析解为无限级数的累加, 为计算方便仅选取有限项. 从图中可以看出, 理论解所取项数越多, 土层中超孔隙水压力的分布规律越接近于文中数值解, 两者具有较好的一致性. 无论土层是单面排水还是双面排水在固结初期, 当理论解的级数只取 1 项时, 其计算结果与实际情况均存在一定的差距, 对于文中计算 1 000 时步的计算结果两者误差约为 20%, 随着固结时间的增加, 误差逐渐减小, 当计算至 10 000 时步时, 误差小于 1%.

对应的宏观土体一维固结微分方程.

2) 采用 Visual C++ 语言编制了格子 Boltzmann 模型的计算程序, 分别计算了饱和土体单面排水和双面排水 2 种情况下, 不同时步土层中超孔隙水压力的消散规律, 计算结果与解析解吻合程度较好, 验证了格子 Boltzmann 方法在计算饱和土体一维固结问题方面的正确性, 为进一步深入研究土体的固结理论提供了一种新的数值计算方法.

## 4 结 论

### 参考文献 (References)

1) 针对饱和土体的 Terzaghi 一维固结问题, 基于 DIQ2 离散速度模型, 建立了在时间和空间上离散的一维格子 Boltzmann 模型, 并采用 Chapman - Enskog 多尺度展开技术推导出该模型演化方程所

[ 1 ] 邱长林, 闫澍旺, 孙立强, 等. 孔隙变化对吹填土地基真空预压固结的影响[J]. 岩土力学, 2013, 34(3): 631 - 638.  
QIU Changlin, YAN Shuwang, SUN Liqiang, et al. Effect of varying void on consolidating of dredger fill under vacuum preloading[J]. Rock and soil mechanics, 2013, 34(3):631 - 638. (in Chinese)

- [ 2 ] 施成华,彭立敏. 基坑开挖及降水引起的地表沉降预测[J]. 土木工程学报, 2006,39(5): 117-121.  
SHI Chenghua, PENG Limin. Ground surface settlement caused by foundation pit excavation and dewatering [J]. China civil engineering journal, 2006, 39(5): 117-121. (in Chinese)
- [ 3 ] 魏纲,周洋,魏新江. 盾构隧道施工引起的工后地面沉降研究[J]. 岩石力学与工程学报,2013,32(S1): 2891-2896.  
WEI Gang, ZHOU Yang, WEI Xinjiang. Research on post-construction surface settlement caused by shield tunneling [J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2013, 32(S1): 2891-2896. (in Chinese)
- [ 4 ] 杨涛,戴济群,李国维. 基于指数法的分级填筑路堤沉降预测方法研究[J]. 土木工程学报, 2005, 38(5): 92-95.  
YANG Tao, DAI Jiqun, LI Guowei. Settlement prediction of stage-construction embankment on soft ground using the exponent fitting method [J]. China civil engineering journal, 2005, 38(5): 92-95. (in Chinese)
- [ 5 ] LAI Huilin, MA Qifeng. A higher order lattice BGK model for simulating some nonlinear partial differential equations [J]. Science in China, 2009, 52(7): 1053-1061.
- [ 6 ] 兰中周,乐励华,高云. 基于格子 Boltzmann 方法的一维 Burgers 方程的数值模拟[J]. 计算机应用,2013,33(9):2432-2435.  
LAN Zhongzhou, LE Lihua, GAO Yun. Numerical simulation of one-dimensional Burgers' equation based on lattice Boltzmann method [J]. Journal of computer applications, 2013, 33(9): 2432-2435. (in Chinese)
- [ 7 ] 何郁波,林晓艳,董晓亮. 应用格子 Boltzmann 模型模拟一类二维偏微分方程[J]. 物理学报,2013,62(19):194701.  
HE Yubo, LIN Xiaoyan, DONG Xiaoliang. Use of lattice Boltzmann method to simulate 2D partial differential equation [J]. Acta physica sinica, 2013, 62(19): 194701. (in Chinese)
- [ 8 ] 袁聚云,钱建固,张宏鸣,等. 土质学与土力学[M]. 第四版. 北京: 人民交通出版社, 2012.
- [ 9 ] 郭照立,郑楚光. 格子 Boltzmann 方法的原理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [ 10 ] 何雅玲,王勇,李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [ 11 ] QIAN Y H, DHUMIERES D, LALLEMAND P. Lattice BGK model for Navier-Stokes equation [J]. Europhysics letters, 1992, 17(6): 479-484.

(责任编辑 朱漪云)

## 本刊荣获第六届华东地区优秀期刊奖

近日,第六届华东地区优秀期刊奖评选结果揭晓,《排灌机械工程学报》榜上有名. 本次评选工作由华东地区六省一市新闻出版广电局联合主办,综合考评政治、学术、编校、印制、发行等因素,全面评价期刊社会影响和学术水平.

华东地区优秀期刊评选会是全国唯一的区域性期刊评选活动,历次评选会得到了国家新闻出版广电总局新闻报刊司的高度重视和支持. 本届评委会由来自华东六省一市的 14 位专家组成,对各省市初评推荐的期刊名单进行了充分讨论、严格把关和民主投票,最终评选出 234 种优秀期刊,其中上海 75 种,浙江 28 种,江西 22 种,福建 26 种,安徽 27 种,江苏 56 种,山东由于特殊原因未计入.

(编辑部)