

doi: 10.3969/j.issn.1674-8530.2011.03.012

半立方抛物线形渠道正常水深算法

赵延风¹, 王正中¹, 方 兴², 刘计良¹, 洪安宇¹

(1. 西北农林科技大学水工程安全与病害防治研究中心 陕西 杨凌 712100; 2. 奥本大学土木工程系 美国 阿拉巴马州 奥本 36849)

摘要: 为了给半立方抛物线形渠道断面正常水深的计算提供一种简捷、通用、精度较高的显函数计算公式, 根据迭代理论并采用优化计算确定初值函数的方法进行分析研究。通过引入断面特征水深的概念, 对半立方抛物线形渠道正常水深的基本方程进行变换处理, 推导出收敛速度较快的迭代公式, 并证明了公式的收敛性; 在断面特征水深范围即无量纲正常水深 $H \in [0.025, 40]$ 范围内, 对迭代公式进行优化计算, 取得合理的迭代初值函数; 合理初值与迭代公式的配合使用, 得到半立方抛物线形渠道断面正常水深的显函数直接计算公式, 并对公式进行了误差分析以及用工程实例进行了验证。结果表明: 在工程常用的断面特征水深范围内, 正常水深的最大相对误差小于 0.3%, 计算公式具有形式简单、精度高、适用范围广的优点, 该研究为排灌渠道的断面设计以及渠道流量控制时求解均匀流水深提供了简捷方法。

关键词: 灌溉渠道; 正常水深; 迭代理论; 优化计算; 半立方抛物线; 断面特征水深

中图分类号: S274.4; TV131.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-8530(2011)03-0241-05

Calculation method for normal depth of semi-cubic parabolic channels

Zhao Yanfeng¹, Wang Zhengzhong¹, Fang Xing², Liu Jiliang¹, Hong Anyu¹

(1. Research Center of Water Engineering Safety and Disaster Prevention, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 712100, China; 2. Department of Civil Engineering, Auburn University, Auburn, Alabama 36849, U. S. A.)

Abstract: In order to obtain the simple and general explicit formula with high accuracy for computing the normal depth of semi-cubic parabolic channels, formula for direct computation of the normal depth was developed by obtaining initial function using iteration theory and optimization. Mathematical transformation on the basic equation for determining the normal depth of semi-cubic parabolic channel was made by introducing the concept of characteristic depth of cross-section and the iterative formula with high convergence rate was derived. According to the optimization of the iterative formula in the range of 0.025 to 40 for dimensionless normal depth H , the reasonable initial function was developed. Direct calculation formula for computing the normal depth of semi-cubic parabolic channels was obtained by using the reasonable initial value and iterative formula. Error analysis of the formula was also carried out. The result indicates that the maximum relative error of the formula is less than 0.3% for the most frequently used range of characteristic depth of cross-section. The formula developed in this paper is simple and has high accuracy with wide range of applications, and it can provide simple method for computing the normal depth when the channel section is designed for irrigation and drainage and controlling the water level.

Key words: irrigation channels; normal depth; iteration theory; optimization; semi-cubic parabola; characteristic depth of cross-section

收稿日期: 2010-10-21

基金项目: 国家 863 计划项目(2002AA62Z3191); 陕西省水利科技专项计划项目(2006-01)

作者简介: 赵延风(1963—), 男, 陕西西安人, 副研究员(zhyf2009@yahoo.cn), 主要从事工程水力学研究。

王正中(1963—), 男, 陕西彬县人, 教授, 博士生导师(wangzz0910@yahoo.com.cn), 主要从事水工结构工程及工程水力学研究。

渠道是泵站工程及排灌工程的重要设施,渠道的正常水深是渠道设计以及渠道水量实行自动控制的重要控制变量^[1]。抛物线类渠道由于水流条件好,尤其是在寒冷地区具有抗冻胀优点,因而广泛地应用于农田排灌等工程中。目前国外在渠道水深计算方面的研究如三角形、矩形、梯形和圆形等断面正常水深提出了一些计算公式^[2-4],但公式比较复杂,误差较大;文献[5-6]对抛物线渠道设计提出了一些方法,也十分复杂;对于二次抛物线形渠道断面的收缩水深等研究提出了不同的计算方法^[7-8];对于半立方抛物线形渠道水深的研究也有了新进展,文献[9]对其收缩水深提出了近似计算公式;文献[10]对其最优断面进行了深入研究,提出了最优断面设计参考值;文献[11]通过优化计算得到了形式简单、精度较高的正常水深近似计算公式,但该公式适用范围较小。基于此,欲提出一种简单、通用的直接计算公式来求解半立方抛物线形渠道断面的正常水深。文中首先引入断面特征水深的概念,通过对半立方抛物线形断面渠道正常水深的基本方程进行变换处理,得到半立方抛物线形断面渠道正常水深快速收敛的迭代公式,再根据优化计算来取得迭代方程的初值函数,通过迭代初值和迭代公式的联合运用,期望取得正常水深的直接计算公式。

1 渠道正常水深的迭代公式

1.1 半立方抛物线形断面正常水深方程

由明渠均匀流的基本公式^[12]可推出:

$$\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6} = \frac{A}{X^{0.4}}, \quad (1)$$

式中: n 为渠道糙率; Q 为流量 m^3/s ; i 为渠道比降; A 为半立方抛物线形渠道过水断面面积 m^2 ; X 为湿周 m 。

半立方抛物线形断面如图 1 所示。

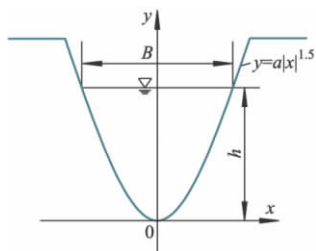


图 1 半立方抛物线形渠道断面

Fig. 1 Semi-cubic parabolic channel section

设其曲线方程为

$$y = a|x|^{1.5}, \quad (2)$$

式中: a 为半立方抛物线断面形状参数 $\text{m}^{-0.5}$ 。

半立方抛物线形渠道过水断面面积为

$$A = \frac{6}{5a^{2/3}}h^{5/3}, \quad (3)$$

湿周为

$$X = \frac{16}{27a^2}\{[1 + 2.25(a^2h)^{2/3}]^{1.5} - 1\}. \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入式(1)中,并整理得半立方抛物线形渠道断面正常水深方程为

$$0.676a^{3.2}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6} = \frac{[(a^2h)^{2/3}]^{2.5}}{\{[1 + 2.25(a^2h)^{2/3}]^{1.5} - 1\}^{0.4}}. \quad (5)$$

1.2 断面特征水深的概念及迭代公式

为了简化公式,引入断面特征水深的概念。将正常水深 h 与抛物线形状参数的平方之积的 $2/3$ 次方定义为半立方抛物线形渠道断面特征水深,其为无量纲参数,也就是无量纲正常水深,用 H 表示,即

$$H = (a^2h)^{2/3}. \quad (6)$$

设已知量综合参数即式(5)等号左端为

$$k = 0.676a^{3.2}\left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{0.6}, \quad (7)$$

则式(5)变为

$$k = \frac{H^{2.5}}{[(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.4}}. \quad (8)$$

由式(8)得半立方抛物线形渠道断面特征水深的迭代方程为

$$H_{j+1} = k^{0.4} [(1 + 2.25H_j)^{1.5} - 1]^{0.16}. \quad (9)$$

2 迭代公式的收敛性证明

根据迭代理论^[13],方程 $x = \phi(x)$ 的一个根为 N ,则迭代公式 $x_{i+1} = \phi(x_i)$ 收敛于 N 的条件为:在 N 的某一邻域 $|x - N| < \delta$ 内,迭代函数的一阶导数的绝对值小于某一正数 L ,即 $|\phi'(x)| \leq L$,且 $0 < L < 1$,那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 N 。因此,只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1,就可以证明该迭代函数是收敛的。

由式(8)得

$$k^{0.4} = \frac{H}{[(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.16}}. \quad (10)$$

设

$$H = \varphi(H), \quad (11)$$

则由式(9)可得

$$\varphi(H) = k^{0.4} [(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.16}. \quad (12)$$

对式(12)求一阶导数可得

$$\varphi'(H) = 0.16k^{0.4} \times \frac{[(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.16}}{(1 + 2.25H)^{1.5} - 1} \times 1.5(1 + 2.25H)^{0.5} \times 2.25, \quad (13)$$

将式(10)代入式(13)并整理得

$$\begin{aligned} \varphi'(H) &= 0.54 \times \frac{H(1 + 2.25H)^{0.5}}{(1 + 2.25H)^{1.5} - 1} = \\ &= 0.54 \times \frac{1}{2.25 + \frac{1}{H} \left[1 - \frac{1}{(1 + 2.25H)^{0.5}} \right]}. \end{aligned} \quad (14)$$

因为 $H > 0$, $(1 + 2.25H)^{0.5} > 1$, $\rho < \left[1 - \frac{1}{(1 + 2.25H)^{0.5}} \right] < 1$, 所以

$$\varphi'(H) < 0.54 \times \frac{1}{2.25 + \frac{1}{H}}, \quad (15)$$

$$|\varphi'(H)| < 0.24. \quad (16)$$

根据迭代理论^[13], 迭代式(9)对任意正数 H 均收敛, 由于一阶导数的绝对值远远小于1, 说明迭代公式收敛速度较快.

3 初值函数及正常水深的计算公式

迭代计算收敛速度的快慢主要取决于两个因素, 一是迭代函数的格式, 二是迭代初值是否恰当. 在迭代函数确定后, 合理的迭代初值是迭代计算快速收敛的关键因素.

对于半立方抛物线形渠道断面特征水深 H 的取值范围, 目前还没有直接可参考的文献, 但最优断面的特征水深可提供基本参考, 参照文献[10]最优断面特征水深的数值 $(a^2 h^*)^{2/3} = 0.981\ 642$, 可近似取为 $(a^2 h^*)^{2/3} \approx 1.0$, 将最优断面特征水深的范围 $[(a^2 h^*)^{2/3}/40, 40(a^2 h^*)^{2/3}]$ 作为特征水深的取值范围, 在该范围内渠道水面宽度 B 与水深 h 的比值即渠道宽深比的范围为 $\lambda = B/h \in [0.32, 12.65]$, 这一范围涵盖了工程常用范围. 那么断面特征水深的取值范围为 $H \in [0.025, 40]$, 在此范围内, 对式(9)以剩余标准差最小为目标进行优化计算, 得到初值函数 $H_0 = 1.458k^{0.5}$, 其拟合效果如图2所示, 相关系数为0.999 8, 将其代入式(9)中得到迭代初值函数

$$H = k^{0.4} [(1 + 3.28k^{0.5})^{1.5} - 1]^{0.16}. \quad (17)$$

将式(17)代入式(9)及式(6)中, 得半立方抛物线形断面到正常水深的计算公式

$$h = \frac{k^{0.6}}{a^2} [(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.24}. \quad (18)$$

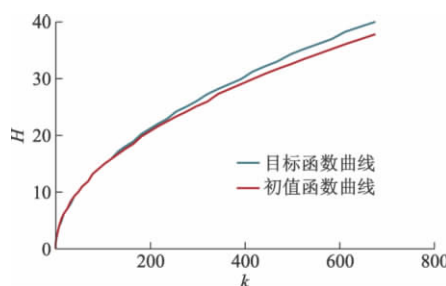


图2 初值函数与目标函数拟合效果

Fig. 2 Fitting results between initial function curve and objective function curve

4 计算公式的误差分析

在工程常用范围内, 给出断面特征水深 $H^* = 0.025 \sim 40$ 范围内一系列数值, 首先根据式(8)计算不同 H^* 时的已知量综合参数 k , 再根据式(17)计算迭代初值 H , 将初值代入式(9)反求断面特征水深的近似值 H_1 , 将求出的断面特征水深的近似值 H_1 与给定值 H^* 进行比较, 求其相对误差, 为了更加明显, 将特征水深 $H \in [0.025, 40]$ 对应的数值转换成渠道宽深比 $\lambda \in [0.32, 12.65]$, 分析结果见图3, 横坐标为渠道宽深比 λ , 纵坐标为断面特征水深的相对误差 e .

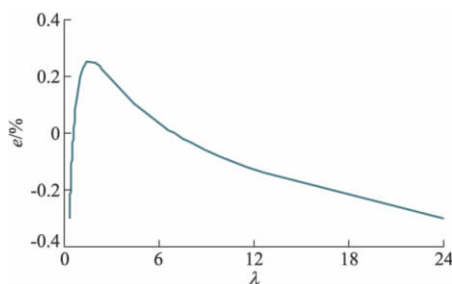


图3 半立方抛物线形渠道正常水深的相对误差分布

Fig. 3 Relative error distribution of normal depth of semi-cubic parabolic channel

从图3及误差分析可以看出, 在特征水深 $H \in [0.006\ 8, 40]$ 范围, 即宽深比 $\lambda \in [0.32, 24]$ 范围内, 无量纲正常水深的最大相对误差也小于0.3%. 经对公式误差计算, 在特征水深 $H \in [0.000\ 6, 120]$ 范围内, 即渠道宽深比 $\lambda \in [0.18, 80]$ 范围内, 最大相对误差仅为0.6%.

5 应用举例

某灌区采用半立方抛物线形的渠道,其方程为 $y = 0.2 |x|^{3/2}$, 渠道糙率 $n = 0.014$, 渠道深度为 2.50 m, 初设渠道底坡比降 $i = 0.001$, 当通过最大设计流量 $Q = 32 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 校核: 设计的渠道底坡能否满足渠道水流为缓流的要求; 渠道深度能否满足最大流量时的过流能力。

均匀流正常水深随着渠道底坡的变化而变化, 底坡越大, 正常水深愈小; 反之, 底坡越小, 正常水深愈大; 如果底坡在某一数值处, 均匀流正常水深恰好等于临界水深, 这时的底坡称为临界底坡。临界底坡对应的均匀流为临界流, 因此可用正常水深和临界水深比较来判别流态, 也可以通过求解弗劳德 (Froude) 数或者求临界底坡的方法判别流态。

对初设半立方抛物线形渠道, 其均匀流正常水深可通过文中公式计算。

由式 (7) 可知

$$k = 0.676a^{3.2} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{0.6} = 0.0192.$$

由式 (17) 得

$$H = k^{0.4} [(1 + 3.28k^{0.5})^{1.5} - 1]^{0.16} = 0.1968.$$

由式 (18) 得

$$h = \frac{k^{0.6}}{a^2} [(1 + 2.25H)^{1.5} - 1]^{0.24} = 2.1676 \text{ m}.$$

经计算机编程计算本例正常水深的数值解为 2.1644 m, 用文中公式求得正常水深的相对误差为 0.099%。

流态判别方法 1: 用临界水深进行判别比较简单, 当正常水深大于临界水深时为缓流, 等于临界水深时为临界流, 小于临界水深时为急流。

根据临界流的基本方程很容易推出半立方抛物线形渠道的临界水深为

$$h_k = \left(\frac{125\alpha a^{4/3} Q^2}{108g} \right)^{\frac{3}{13}} = 1.8426 \text{ m}, \quad (19)$$

式中: h_k 为临界水深, m; α 为动能修正系数, 不特别说明时取 1; g 为重力加速度, 一般取 9.81 m/s^2 。

由式 (18) 计算结果可以看出正常水深为 $h = 2.1676 \text{ m}$, 大于临界水深 $h_k = 1.8426 \text{ m}$, 渠道水流为缓流流态。

流态判别方法 2: 用弗劳德数进行判别, 当弗劳德数大于 1 时为急流, 等于 1 时为临界流, 小于 1 时为缓流。其计算公式为^[12]

$$Fr = \frac{\sqrt{\alpha}Q}{A\sqrt{gh}}, \quad (20)$$

式中: Fr 为弗劳德数; \bar{h} 为断面平均水深, m; 对于抛物线形渠道断面, 其平均水深为

$$\bar{h} = \frac{m}{m+1}h, \quad (21)$$

式中: m 为抛物线指数。

由式 (3) 得

$$A = \frac{6h^{5/3}}{5a^{2/3}} = 12.7387 \text{ m}^2.$$

将求出的正常水深代入式 (21) 得

$$\bar{h} = \frac{m}{m+1}h = 1.3006 \text{ m},$$

由式 (20) 得 $Fr = \frac{\sqrt{\alpha}Q}{A\sqrt{gh}} = 0.7033 < 1$, 由于

弗劳德数小于 1, 渠道水流为缓流流态。

流态判别方法 3: 用临界底坡判别流态, 该方法直观但计算过程比较复杂。当设计底坡大于临界底坡时为急流, 等于临界底坡时为临界流, 小于临界底坡时即为缓流。其计算公式为^[12]

$$i_k = \frac{n^2 g X_k}{\alpha B_k R_k^{1/3}}, \quad (22)$$

式中: X_k 为渠中水深为临界水深时的湿周, m; B_k 为对应临界水深时的水面宽度, m; R_k 为对应临界水深时的水力半径, m; 其他符号意义同前。

由式 (3) 得对应临界水深时的过流面积

$$A_k = \frac{6h_k^{5/3}}{5a^{2/3}} = 9.7169 \text{ m}^2.$$

由式 (4) 得对应临界水深时的湿周

$$X_k = \frac{16}{27a^2} \{ [1 + 2.25(a^2 h_k)^{\frac{2}{3}}]^{1.5} - 1 \} = 9.6083 \text{ m}.$$

由式 (2) 得水面宽度

$$B_k = 2 \left(\frac{h_k}{a} \right)^{2/3} = 8.7894 \text{ m}.$$

对应于临界水深时的水力半径

$$R_k = \frac{A_k}{X_k} = 1.0113 \text{ m}.$$

由式 (22) 得临界底坡

$$i_k = \frac{n^2 g X_k}{\alpha B_k R_k^{1/3}} = 0.002.$$

渠道设计底坡为 $i = 0.001$, 小于临界底坡 $i_k = 0.002$, 渠道水流为缓流。

以上 3 种判别方法均说明, 渠道设计底坡比降能够满足渠道水流为缓流的要求; 由于初设渠道深

度 2.50 m 大于最大流量时的正常水深 2.164 4 m , 渠道能够满足最大流量 $32 \text{ m}^3/\text{s}$ 时的过流能力。

6 结 论

通过对半立方抛物线形渠道断面正常水深方程的恒等变形处理,得到正常水深的迭代计算公式,再通过优化计算得到初值函数表达式。在农田排灌及水利水电工程中,对于渠道水深的计算误差一般小于 1% 时即可满足工程要求,而文中公式在工程常用的断面特征水深 $H \in [0.006\ 8, 40]$ 范围内的最大误差小于 0.3% ,在限定的断面特征水深较大范围即 $H \in [0.000\ 6, 120]$ 范围内,最大误差仅为 0.6% ,达到了准确计算效果。文中并以工程实例说明正常水深在渠道设计方面是一个重要的控制参数。分析结果表明,文中提出的直接计算公式在工程常用范围内精度非常高,而且计算公式形式简单,适用范围较宽,能够满足工程的要求。该公式对采用半立方抛物线形断面渠道正常水深的计算提供了方便,避免了查图表或试算或用计算机编程计算的麻烦,而且有较高的精度。

参考文献(References)

- [1] 姚林碧,张仁田.渠道自动控制技术与发展趋势[J].排灌机械,2002,20(4):34-38.
Yao Linbi Zhang Rentian. Canal automatic control algorithms and their technical trends[J]. *Drainage and Irrigation Machinery* 2002,20(4):34-38. (in Chinese)
- [2] Swamee Prabhata K. Normal-depth equations for irrigation canals[J]. *Journal of Irrigation Drainage Engineering*,1994,120(5):942-948.
- [3] Swamee Prabhata K ,Rathie Pushpa N. Exact solutions for normal depth problem[J]. *Journal of Hydraulic Research* 2004,42(5):541-547.
- [4] Shrestha Ravi C ,Barkdoll Brian. A direct solution to normal depth in open channels [C] // *Conference Proceeding of World Water & Environmental Resources Congress* 2005,173:405.
- [5] Anwar Arif A ,Clarke Derek. Design of hydraulically efficient power-law channels with freeboard [J]. *Journal of Irrigation Drainage Engineering* 2005,131(6):560-563.
- [6] Anwar Arif A ,De Vries Tonny T. Hydraulically efficient power-law channels [J]. *Journal of Irrigation Drainage Engineering* 2003,129(1):18-26.
- [7] 芦 琴,王正中,任武刚.抛物线形渠道收缩水深简捷计算公式[J].干旱地区农业研究,2007,25(2):134-136.
Lu Qin ,Wang Zhengzhong ,Ren Wugang. A formula for quickly calculating water depth at vena contraction in parabola form channel [J]. *Agricultural Research in the Arid Areas* 2007,25(2):134-136. (in Chinese)
- [8] 文 辉,李凤玲.抛物线形断面渠道收缩水深的解析解[J].长江科学院院报,2009,26(9):32-33.
Wen Hui ,Li Fengling. Analytical solution of water depth in parabolic-shaped channel with contracted section [J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute* , 2009,26(9):32-33. (in Chinese)
- [9] 文 辉,李凤玲.立方抛物线断面渠道收缩水深的直接计算方法[J].人民长江,2009,40(13):58-59.
Wen Hui ,Li Fengling. A direct calculation method of contracted depth in semi-cubic parabola-shaped channel [J]. *Yangtze River* ,2009,40(13):58-59. (in Chinese)
- [10] 魏文礼,杨国丽.立方抛物线形渠道水力最优断面的计算[J].武汉大学学报:工学版,2006,39(3):49-51.
Wei Wenli ,Yang Guoli. Calculation of optimal hydraulic cross-section for semi-cubic parabola-shape channel [J]. *Engineering Journal of Wuhan University* 2006,39(3):49-51. (in Chinese)
- [11] 文 辉,李凤玲.立方抛物线形渠道水力计算的显式计算式[J].人民黄河,2010,32(1):75-76.
Wen Hui ,Li Fengling. Explicit formula of hydraulic calculation of semi-cubic parabola-shaped channel [J]. *Yellow River* 2010,32(1):75-76. (in Chinese)
- [12] 赵振兴,何建京.水力学[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [13] 关 治,陈景良.数值计算方法[M].北京:清华大学出版社,1990.

(责任编辑 徐云峰)