第26卷第4期
2008年7月

排灌机械
Drainage and Irrigation Machinery

Vol. 26 No. 4
July 2008

荷电液滴蒸发破碎过程的数学模型

王晓英，王军锋，闻建龙，罗惕乾
（江苏大学 能源与动力工程学院，江苏 镇江 212013）

摘　要：针对荷电液滴蒸发破碎过程伴随的电荷衰减、质量和热量的传递问题进行了理论分析，得出荷电液滴电荷衰减规律，建立荷电液滴蒸发破碎过程的数学模型. 建立重力作用下作平抛运动液滴的轨道模型，得出了水平方向与竖直方向上的最大输运距离. 研究表明，液滴所带电荷是随时间作指数规律衰减，液滴电导率越高，介电常数越小，电荷衰减越快；液滴完全蒸发所需时间基本上与液滴初始半径的平方成正比. 荷电液滴在蒸发过程中，临界电量随液滴温度的增加而减小，当液滴带电量 q 大于等于临界电量 q_c 时，蒸发过程中发生库仑分裂，并实现了对库仑分裂时刻的预测.

关键词：荷电液滴；库仑分裂；蒸发；理论分析；轨道模型
中图分类号：O359　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-6254(2008)04-0065-04

Mathematic model of evaporation and breakup for charged droplets

WANG Xiao-ying, WANG Jun-feng, WEN Jian-long, LUO Ti-qian
(School of Energy and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China)

Abstract: By theoretical analysis on charge decreasing, mass transfer and heat transfer processes during charged droplet evaporation, the discipline of charge decreasing and the mathematic model for charged droplet evaporation and breakup are obtained. Meanwhile, for a droplet falling freely under gravity with horizontal projection, the track model and the longest distance in both horizontal and vertical directions are obtained. The results show that charge decreases exponentially with time and the decrease gets quicker if the conductivity is greater or dielectric constant is smaller. The total time for droplet evaporation is in proportion to initial droplet radius, the critical charge gets smaller with increasing droplet temperature, and the droplet breaks when the droplet charge is greater than the critical charge. The model predicts the Coulombic fission time of the droplet.

Key words: charged droplet; coulombic fission; evaporation; theoretical analysis; track model

荷电雾化具有雾滴细小、均匀，附着性好的特点，在燃油燃烧、喷雾降温、农药喷洒、材料制备等方面已有广泛的应用[1-4]. 荷电雾化产生的液滴在输运过程中，周围环境温度高于液滴温度时，气体与液滴发生传热传质，属于复杂的多相流问题，同时，由于库仑力作用，有可能发生二次破碎. 目前，没有荷电液滴大空间内输运过程中蒸发现象的研究. 为此，笔者对荷电液滴蒸发破碎过程进行了分析，建立数学模型，推导液滴完全蒸发所需的时间，研究荷电液滴蒸发过程中出现二次破碎的必要条件.

1　电荷的积累与衰减

在直流电晕荷电过程中，存在场致荷电和扩散

收稿日期：2008-03-08
基金项目：江苏省高校自然科学研究项目(03KJD430064)；江苏大学基金资助项目(JDG2003016)

作者简介：王晓英(1981—)，女，江苏常州人，博士研究生(flair619@ujs.edu.cn)，主要从事荷电两相流的研究.
王军锋(1975—)，男，山东烟台人，副教授(wangjunfeng@ujs.edu.cn)，主要从事荷电两相流的研究.

荷电两类不同的带电机理. 一般来说静电喷雾液滴粒径为几十微米,场致荷电起主作用. 场致荷电是通过电晕放电形成离子,这些离子被外电场加速而与颗粒碰撞,从而使不带电的颗粒在进入外电场的空间后带上电荷,其饱和荷电量[5]

$$q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \quad (1)$$

式中 R 为液滴初始半径;ε_0 为空气介电常数;ε 为液滴介电常数;E 为电场强度.

根据导体的集肤效应可知,雾滴内部的能量随深入距离近似按指数规律衰减,因此认为雾滴的荷电量为其表面荷电量. 根据高斯定理,雾滴在电场中所带的电荷

$$q = \iint_s \varepsilon E \mathrm{d}S \quad (2)$$

式中 S 为雾滴表面积.

雾滴初始荷电后,其荷电量将随时间而泄漏衰减,在液滴表面任一点,因电荷的泄漏形成电流密度 j,根据欧姆定律的微分形式有

$$j = \gamma E$$

式中 γ 为液滴的电导率.

液滴表面流出的电流,即单位时间内从液滴表面泄漏的电量为 $\iint_s j\mathrm{d}S$,根据电荷守恒定律,该电流等于液滴表面上电荷的减少率,即

$$\iint_s j\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \text{或} \iint_s \gamma E \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad (3)$$

所以

$$-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{\varepsilon} q$$

则

$$q = q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (4)$$

可以看出,液滴所带电荷是随时间作指数规律衰减的,并且电导率越大,电荷衰减越快,介电常数越大,电荷越不易衰减.

2 荷电液滴的蒸发模型

为了讨论和计算方便,作如下假设:

① 液滴为球形,半径为 r,液滴的蒸发以球对称进行;② 液滴内部温度均匀,且温度比环境温度低,外界向液滴传热,忽略辐射传热;③ 瞬时相平衡,液滴和空气交界面上的水蒸汽浓度为该温度下水蒸汽的饱和浓度;④ 气相准稳态;⑤ 忽略液滴蒸发过程中表面收缩对径向通量的影响;⑥ 气液两相性质参数均为常量.

2.1 传质分析

根据质量守恒定律,蒸发速度

$$G = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -4\pi\rho_1 r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad (5)$$

式中 G 单位为 kg/s;ρ_1 为液滴密度,kg/m^3; r 为液滴半径,m.

假设蒸汽为理想气体,蒸发速度可用下式表示

$$G = A_1 \frac{h_D}{R_1}\left(\frac{p_{sat}}{T_1} - \frac{p_{1,g}}{T_g}\right) \quad (6)$$

式中 A_1 为液滴表面积,m^2; h_D 为对流传质系数,m/s;R_1 为蒸汽气体常数,J/(kg·K); p_{sat},$p_{1,g}$ 分别为液滴表面饱和蒸汽分压力和周围空气水蒸汽分压力,Pa;T_1,T_g 分别为液滴温度和周围环境温度.

式(5) 中的传质系数可以通过准则关联式(7)求得[6].

$$Sh = 2 + 0.6Re^{0.5}Sc^{0.33} \quad (7)$$

式中 Sh 为沙伍德数,$Sh = \frac{h_D d}{D}$;D 为扩散系数,m^2/s; d 为液滴直径,m; $Sc = \frac{\nu}{D}$,其中 ν 为运动粘度;D 为扩散系数.

所以,蒸发过程中对流传质系数

$$h_D = \frac{1}{2r}(2D + 0.6Re^{0.5}\upsilon^{0.33}D^{0.67}) \quad (8)$$

联立式(5),(6),(8),可得

$$-4\pi\rho_1 r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{1}{2r}(2D + 0.6Re^{0.5}\upsilon^{0.33}D^{0.67}) \times \frac{1}{R_1}\left(\frac{p_{sat}}{T_1} - \frac{p_{1,g}}{T_g}\right)$$

$$r^2 = r_0^2 - \frac{2D + 0.6Re^{0.5}\upsilon^{0.33}D^{0.67}}{R_1\rho_1}\left(\frac{p_{sat}}{T_1} - \frac{p_{1,g}}{T_g}\right)t$$

由于 $\frac{2D + 0.6Re^{0.5}\upsilon^{0.33}D^{0.67}}{R_1\rho_1}\left(\frac{p_{sat}}{T_1} - \frac{p_{1,g}}{T_g}\right)$ 基本上是一个常数,由此液滴半径随时间的变化为

$$r^2 = r_0^2 - kt$$

$$k = \frac{2D + 0.6Re^{0.5}\upsilon^{0.33}D^{0.67}}{R_1\rho_1}\left(\frac{p_{sat}}{T_1} - \frac{p_{1,g}}{T_g}\right) \quad (9)$$

液滴的总蒸发时间

$$t_t = \frac{r_0^2}{k} \quad (10)$$

2.2 传热分析

在液滴蒸发初期,液滴的温度小于环境温度,液滴不断受热升温而蒸发. 随着蒸发过程的进行,液滴温度上升,与环境温差减小,环境气体对液滴的传热

逐渐减弱. 同时,液滴温度的升高导致液滴表面的蒸发过程加速,吸收的蒸发潜热也不断增多. 这样,当雾滴达到某一温度时,其所得的热量恰好等于蒸发所需的热量,于是液滴温度不再改变,蒸发处于一种平衡状态,雾滴在这一温度下直到汽化完毕.

半径为 r 的液滴在 Δt 时间内受热而升温 ΔT_1 所需的热量

$$Q_1 = C_p m \Delta T_1$$

式中 C_p 为液滴定压比热,J/(kg · K).

液滴在 Δt 内通过表面吸收的热量

$$Q_2 = 4\pi h r^2 (T_g - T_1)\Delta t$$

式中 h 为对流换热系数,W/(m^2 · K); T_1,T_g 分别为液滴温度和环境温度,K.

Δt 时间内液滴蒸发带走的热量

$$Q_3 = GL\Delta t$$

式中 L 为汽化潜热,J/kg.

则热平衡关系式

$$Q_1 = Q_2 - Q_3$$

即

$$C_p m \Delta T_1 = 4\pi h r^2 (T_g - T_1)\Delta t - GL\Delta t$$

则液滴温度升高速度

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{C_p m}[4\pi h r^2 (T_g - T_1) - GL] \qquad (11)$$

当 $\frac{dT_1}{dt} = 0$ 时,蒸发达到平衡状态,液滴的温度恒定不变,这时

$$4\pi h r^2 (T_g - T_1) = GL \qquad (12)$$

2.3　液滴轨道分析

假设半径为 r 液滴在空气中作平抛运动,建立直角坐标系,如图 1 所示,则液滴在输运过程中 x、y 方向受到的阻力分别为 $6\pi r\mu v_x$, $6\pi r\mu v_y$[7].

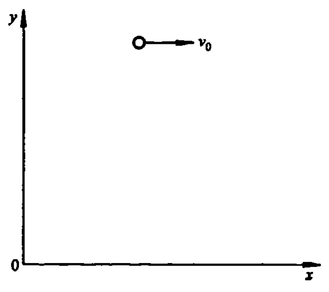

图 1　液滴运动示意图

Fig. 1　Layout of droplet movement

y 方向,运动过程中主要受到重力、空气阻力的作用;根据牛顿第二定律,可得

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g - 6\pi r\mu v_y = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 \frac{dv_y}{dt}$$

若不考虑 r 的变化,令 $A = -\frac{-9\mu}{2r^2\rho_1}$,则

$$v_y = \frac{2r^2 g\rho_1}{9\mu}(1 - e^{At})$$

y 方向液滴最大输运距离

$$s_y = \int v_y dt = \int_0^{t_t} \frac{2r^2 g\rho_1}{9\mu}(1 - e^{At})dt = \frac{2r^2 g\rho_1}{9\mu}(t_t - e^{At_t} - 1)$$

同理,x 方向可列方程 $-6\pi r\mu v_x = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 \frac{dv_x}{dt}$,则

$$v_x = v_0 e^{At}$$

x 方向液滴最大输运距离为

$$s_x = \int v_x dt = \int_0^{t_t} v_0 e^{At} dt = v_0\left(-\frac{2r^2\rho_1}{9\mu}\right)(e^{At} - 1)$$

该模型没有考虑蒸发过程中液滴粒径的变化,而实际上粒径变化对速度有一定的影响. 重力、惯性力与液滴半径 r^3 成正比,空气阻力与 r 成正比,所以实际情况下 $\frac{dv_x}{dt}$、$\frac{dv_y}{dt}$ 要小一些,模型预测的液滴最大输运距离 s_x、s_y 偏大.

3　荷电液滴蒸发过程的库仑分裂

当液滴的表面荷电时,库仑斥力的作用使维持液滴球面的表面张力削弱,如果液滴表面所带的电荷的密度足够高,静电力将克服表面张力导致液滴破碎,即库仑分裂.

液滴带电而使其所具有的静电能为

$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon r}$$

表面张力的变化引起的表面能变化为

$$4\pi\Delta\sigma r^2$$

液滴的总能量

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon r} + 4\pi\Delta\sigma r^2$$

根据虚功原理

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^2} + 8\pi\Delta\sigma r = 0$$

因此,$\Delta\sigma = \frac{q^2}{64\pi^2\varepsilon r^3}$

式中 $\Delta\sigma$ 为由于液滴荷电而引起表面张力的下降量.

则当液滴表面带有电量 q 的静电时，表面张力

$$\sigma' = \sigma - \frac{q^2}{64\pi^2 \varepsilon r^3} \tag{13}$$

若表面张力完全被抵消，液滴出现库仑分裂，此时有 $\sigma = \frac{q^2}{64\pi^2 \varepsilon r^3}$，则液滴半径为 r 时，其临界电量

$$q_c = 8\pi(\varepsilon \sigma r^3)^{1/2}.$$

另外，表面张力 σ 是液体的物性参数，它与温度成线性关系，$\sigma = \sigma_0 - \alpha(T_1 - T_0)$，式中 σ_0 为液滴初始温度 T_0 下的表面张力；σ 为蒸发过程中液滴温度 T_1 下的表面张力；α 为温度系数.

蒸发过程中荷电液滴的临界电量

$$q_c = 8\pi\{\varepsilon[\sigma_0 - \alpha(T_1 - T_0)]r^3\}^{1/2} \tag{14}$$

当 $q \geqslant q_c$，荷电液滴带电量达到瑞利极限，液滴开始分裂、破碎，其破碎时刻可由下式确定

$$q_0 e^{-t/\tau} = 8\pi\{\varepsilon[\sigma_0 - \alpha(T_1 - T_0)](r_0^2 - kt)^{1.5}\}^{1/2} \quad (t \leqslant t_t) \tag{15}$$

4 结　论

1）分析了荷电液滴蒸发过程中单个液滴电荷衰减规律，提出了液滴出现库仑分裂的临界电量随液滴温度的增加而减小.

2）建立了荷电液滴蒸发过程中传热传质模型，能够实现对液滴完全蒸发所需的时间、液滴最大输运距离的预测.

3）分析过程中没有考虑液滴内部的热传导问题，还需要作进一步的深化研究.

参考文献(References)

[1] Law S E. Agricultural electrostatic spray application: a review of significant research and development during the 20th century[J]. *Journal of Electrostatics*, 2001, 51: 25-42.

[2] Hideo W, Tatsushi M, Hideo Y. Experimental study on electrostatic atomization of highly viscous liquids[J]. *Journal of Electrostatics*, 2003(57): 183-197.

[3] 王贞涛，闻建龙，陈　燕，等. 静电雾化理论及应用技术研究进展[J]. 排灌机械，2004，22(6)：41-44.
WANG Zhen-tao, WEN Jian-long, CHEN Yan, et al. Advances and application improvement of electrostatic atomization technology[J]. *Drainage and Irrigation Machinery*, 2004, 22(6): 41-44. (in Chinese)

[4] 康　灿，杨敏官，罗惕乾，等. 高压静电喷洒机的试验[J]. 江苏大学学报：自然科学版，2007，28(3)：197-200.
KANG Can, YANG Min-guan, LUO Ti-qian, et al. Experiment of high-voltage electrostatic spray machine[J]. *Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition*, 2007, 28(3): 197-200. (in Chinese)

[5] 于　辉，何雄奎，仲崇山，等. 在静电喷雾中喷液雾化特性对荷质比的影响[J]. 安徽农业科学，2007，35(15)：4706-4707.
YU Hui, HE Xiong-kui, ZHONG Chong-shan, et al. Effect of the liquid properties of electrostatic spraying on charge-mass ratio[J]. *Journal of Anhui Agriculture Science*, 2007, 35(15): 4706-4707. (in Chinese)

[6] 郭烈锦. 两相与多相流动力学[M]. 西安：西安交通大学出版社，2002：360-372.

[7] 王晓英. 荷电液滴雾化机理的研究[D]. 镇江：江苏大学能源与动力工程学院，2003.

（责任编辑　贾国方）