曲面拟合和曲面积分在流量计算中的应用

马 峥，陈红勋

（上海大学上海市应用数学和力学研究所，上海 200072）

摘 要：水利行业经常要进行流量计算，这样就会遇到曲面拟合和曲面积分的问题。将曲线的样条函数插值和高斯配点法扩展到曲面上来解决这一问题，并对泵站流量、效率、明渠和管道流量进行了计算。结果表明，该计算方法能够满足流量计算等工程实际的需要。

关键词：流量计算；曲面拟合；曲面积分；样条函数；高斯配点法

中图分类号：O351 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-6254(2004)03-0018-04

0 引言

目前，在大部分水利工程中，流量的测量和计算还停留在经典的计算和测量方法上。一般是根据水泵的特性曲线来计算，即根据水泵叶片角度和扬程推算出水泵流量以及效率，这样根据特性参数拟合出任意工况下的流量和效率会遇到曲面拟合问题。对于明渠，采用一些测流仪器测量明渠断面多点的速度，并由此推测出整个明渠的流量，会遇到曲面积分的问题。曲线积分和曲线拟合都有比较成熟的理论，曲线拟合可以用样条函数来处理，而曲线积分（单重积分）也可以用高斯配点法解决，为此我们考虑将曲线积分和曲线拟合这两种方法扩展到曲面上来解决流量计算遇到的曲面拟合和曲面积分问题。

1 曲线拟合和曲线积分

曲线拟合一般用三次样条函数的方法实现，在[a，b]区间内构造一个三次样条函数，使得满足如下条件：

1）将[a，b]区间分为 n 段，节点处函数值已知：$S(x_i)=S_i$。

2）每段内的分段函数是一三次多项式。

3）节点处满足一次、二次的微商连续。

如果每段距离相同，则有在$[X_i，X_{i+1}]$内分段函数的表达式为：

$$S(x)=(1+2x)(x-1)^2S_0+(3-2x)x^2S_1+x(x-1)^2m_0+x^2(x-1)m_1$$

其中 $x=(X-X_i)/(X_{i+1}-X_i)$，$S_0=S(x_i)$，$S_1=S(x_{i+1})$，$m_0=S'(x_i)$，$m_1=S'(x_{i+1})$。

建立相邻区间连接点二次微商连续方程，得到以节点处一阶导数为未知量的三对角矩阵形式的方程组，求解方程组得到各节点处一阶导数值，即得到了每段的分段函数的表达式。

高斯积分是将一区间段上的某一函数的积分用一些节点上的函数值与权乘积的叠加代替：$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{n}W_i.f(x_i)$，而节点位置和权值的选取使得该式能够满足最大的代数精度，一般情况下，n 个节点能够达到 $2n-1$ 次代数精度。

2 曲面拟合及泵站流量和效率计算

在 $X\in[X_0,X_n]$，$Y\in[Y_0,Y_m]$区间内分为 $m\times n$ 个单元，在单元内构造一双三次样条函数，方法如下：设 x，y 为在 $X\in[X_i,X_{i+1}]$，$Y\in[Y_j,Y_{j+1}]$ 单元方格内的相对坐标，即：$x=(X-X_i)/(X_{i+1}-X_i)$，$y=(Y-Y_j)/(Y_{j+1}-Y_j)$，则 $x\in[0,1]$，$y\in[0,1]$。给定四个在[0,1]内的函数，形式和特点见表1。

表1 四个基本函数表达式以及节点处函数值和导数值

函数	f_0 $(1+2x)(x-1)^2$	f_1 $(3-2x)x^2$	g_0 $x(x-1)^2$	g_1 $x^2(x-1)$
0点函数	1	0	0	0
1点函数	0	1	0	0
0点导数	0	0	1	0
1点导数	0	0	0	1

假设在单元方格的四个顶点处的函数值及其关于相对坐标的导数值为：h_{00}，h_{00x}，h_{00y}，h_{00xy}，

基金项目：上海市重点学科建设项目

作者简介：马 峥（1969.1-），男，黑龙江齐齐哈尔人，副研究员，主要从事流体力学及流体动力工程的研究。

h_{10}，h_{10x}，h_{10y}，h_{10xy}，h_{01}，h_{01x}，h_{01y}，h_{01xy}，h_{11}，h_{11x}，h_{11y}，h_{11xy}，则构造满足以上条件的三次函数如下：

$$\begin{aligned}H(x,y)=&f_0(x)f_0(y)h_{00}+f_0(x)f_1(y)h_{01}+\\&f_0(x)g_0(y)h_{00y}+f_0(x)g_1(y)h_{01y}+\\&f_1(x)f_0(y)h_{10}+f_1(x)f_1(y)h_{11}+\\&f_1(x)g_0(y)h_{10y}+f_1(x)g_1(y)h_{11y}+\\&g_0(x)f_0(y)h_{00x}+g_0(x)f_1(y)h_{01x}+\\&g_0(x)g_0(y)h_{00xy}+g_0(x)g_1(y)h_{01xy}+\\&g_1(x)f_0(y)h_{10x}+g_1(x)f_1(y)h_{11x}+\\&g_1(x)g_0(y)h_{10xy}+g_1(x)g_1(y)h_{11xy}\end{aligned}$$

以上表达形式是在相对坐标的基础上，而真正求解时要转换为绝对坐标系下的形式。区间内部节点函数值已知，要确定曲面函数需确定各节点处 x 方向导数、y 方向导数以及 xy 的混合导数，共 $3\times(m-1)\times(n-1)$ 个未知量，需用节点和边界关于 x 的二阶导数和 y 的二阶导数的连续条件求解，由于共用相同边界的上下单元关于 x 的二阶导数的连续条件及共用相同边界的左右单元关于 y 的二阶导数的连续条件根据单元曲面函数性质自然满足，则只需满足共用相同边界的上下单元关于 y 的二阶导数的连续条件及共用相同边界的左右单元关于 x 的二阶导数的连续条件。每个单元边界条件中有四类函数，需要四个方程，这样方程的个数为 $4\times(m-1)\times(n-1)$ 个，这些方程不能同时满足，只能舍去一些。处理方法有如下三种：

1）令 $Hxy(x, y)=0$，使得在整个区间内满足：$H(x, y)$，$Hx(x, y)$，$Hy(x, y)$ 连续，在 Y 在 Y_i 处边界 $Hxx(x, y)$ 连续，在 X 在 X_i 处边界 $Hyy(x, y)$ 连续。具体做法：建立满足 $X=X_1$，$X_2 \cdots X_n$ 线上的每个节点处 $Hyy(x, y)$ 连续的具有三对角矩阵的矩阵方程组，求解 $Hy(x, y)$；建立满足 $Y=Y_1$，$Y_2 \cdots Y_m$ 线上的每个节点处 $Hxx(x, y)$ 连续的具有三对角矩阵的方程组，求解 $Hx(x, y)$。其中边界条件为两端二阶微商为 0，这样拟合效果比较好。

2）舍去在各单元左右边界关于 X 的二阶偏导数连续条件，使得在整个区间内满足：$H(x, y)$，$Hx(x, y)$，$Hy(x, y)$，$Hxy(x, y)$，$Hyy(x, y)$ 连续以及各单元上下边界关于 X 的二阶偏导数连续。具体做法：在利用第一种方法求解 $Hx(x, y)$ 和 $Hy(x, y)$ 的基础上，建立满足 $Y=Y_1$，$Y_2 \cdots Y_m$ 边界的各节点处 $Hyy(x, y)$ 连续的具有三对角矩阵的矩阵方程组，求解 $Hxy(x, y)$。

3）舍去在各单元上下边界关于 Y 的二阶偏导数连续条件，使得在整个区间内满足：$H(x, y)$，$Hx(x, y)$，$Hy(x, y)$，$Hxy(x, y)$，$Hxx(x, y)$ 连续以及各单元左右边界关于 Y 的二阶偏导数连续。具体做法：在利用第一种方法求解 $Hx(x, y)$ 和 $Hy(x, y)$ 的基础上，建立满足 $X=X_1$，$X_2 \cdots X_n$ 边界的各节点处 $Hxx(x, y)$ 连续的具有三对角矩阵的矩阵方程组，求解 $Hxy(x, y)$。

利用算例加以验证，采用公式

$$Z=3.0 * e^{-0.1*(x^2+y^2)} * \cos[0.04\pi *(x^2+y^2)]\quad,$$

在 $x\in[-5, 5]$，$y\in[-5, 5]$ 区域内取 121 个样本点进行拟合，样本点位置及拟合曲面如图 1 所示。

从以上例子看到，虽然二阶导数的连续条件不能完全满足，拟合效果以及拟合曲面的光滑性依然比较好。

水泵调节方式一般可分为两种，叶片角度调节和转速调节，大型水泵一般是叶片角度调节，而小水泵则为转速调节。水泵在出厂时给出其特性曲线，即在不同的叶片角度(或转速)下，流量和效率与扬程的关系曲线。要根据特性曲线得到不同工况下水泵的流量和效率，则需要进行曲面拟合。根据某泵站泵的特性曲线，得到一些样本点的数据（不同的扬程和叶片角度下的流量和效

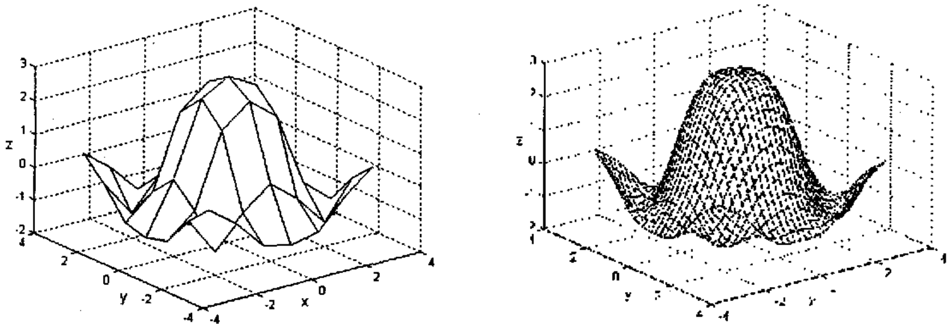

图 1　样本点（左）及拟合效果（右）图

率)，通过曲面拟合得到该泵的流量拟合曲面 $Q(\theta, H)$(图 2 右)和效率拟合曲面 $\eta(\theta, H)$(图 3 右)，其中 Q 为流量，η 为效率，θ 为叶片角度，H 为扬程。

3　曲面积分及明渠和管道流量计算

在节点数一定的条件下，选取适当的节点位置和相应的系数，使得求积公式

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k, y_k)$$

具有最大的代数精度。这样权值以及位置共有 $3n$ 个未知量。如果以上求积公式对于所有 m 次代数式 $P_m(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i} a_{ij}x^i y^j$ 是准确的，则需建立 $(m+1)(m+2)/2$ 个方程。一般意义上讲，未知量个数与方程个数相同才可能有解，即 $3n=(m+1)(m+2)/2$，这样得到系列 n 和 m 的整数解：$n=1$，$m=1$；$n=2$，$m=2$；$n=5$，$m=4$；$n=7$，$m=5$……

在求解过程中发现：一次代数精度的解比较简单：节点在原点，权值为 4；满足二点的二次代数精度的方程无解；满足五点的四次代数精度的方程可解，节点坐标及权值见表2。由于点的对称性，该解还满足五次代数精度。表 3 为各被积函数的积分精确解和数值解的比较。

表 2　四次代数精度高斯节点坐标及权值

节点	x	y	权值
1	0	0	8/7
2	$\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{15}}$	$\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{15}}$	5/7
3	$\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{15}}$	$-\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{15}}$	5/7
4	$-\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{15}}$	$-\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{15}}$	5/7
5	$-\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{15}}$	$\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{15}}$	5/7

表 3　一些函数高斯积分与精确解比较

积分函数	精确解	数值解
x^2y^2	4/9	4/9
$(1-x^2)(1-y^2)$	16/9	16/9
$\cos(x)\cdot\cos(y)$	2.8324	2.8346
$\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$	0.466	0.467

在水利行业，经常会遇到明渠和河道流量计

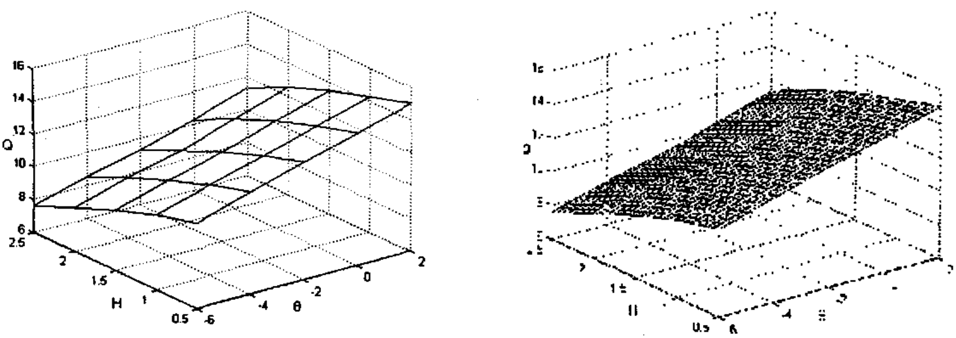

图 2　某泵站水泵流量样本点(左)及拟合效果(右)图

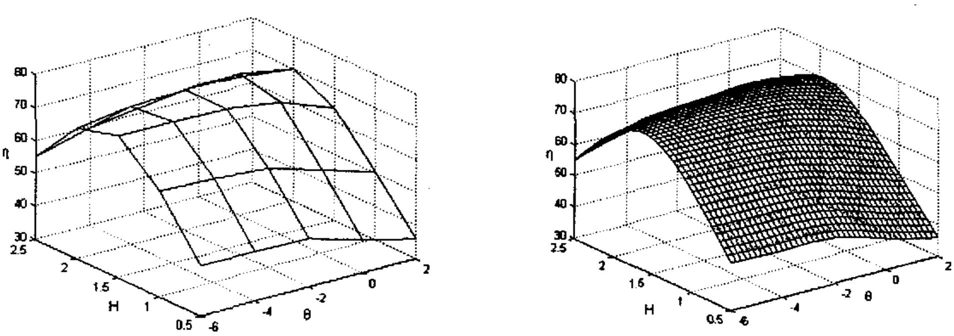

图 3　某泵站水泵效率样本点(左)及拟合效果(右)图

算的问题，一般通过测量几个特征点的速度，根据各点加权系数得到整个渠道的流量，但特征点位置选取是非常重要的但却没有统一说法，我们以矩形明渠为例，根据上述节点位置和权值确定特征点的位置和加权系数来计算明渠流量。首先对明渠断面坐标无量纲化，如图 4 所示。

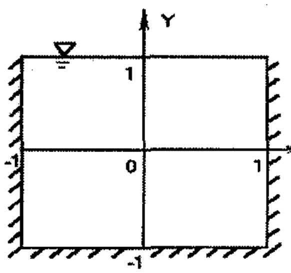

图 4　矩形明渠断面示意图

明渠流速分布经验公式为：$u=(1-x^2)(y+1)^2$，得到各特征点的位置、速度和加权系数见表 4。

表 4　各特征点的位置、速度和加权系数

节点	坐标	速度	权值
1	(0，0)	1.0	1.144
2	(0.846，0.466)	0.610971	0.714
3	(0.466，-0.846)	0.018566	0.714
4	(-0.846，-0.466)	0.081065	0.714
5	(-0.466，0.846)	2.667710	0.714

得到明渠流量为：3.556，这与通过流速公式积分结果 32/9 误差仅为 0.01%，且只是数值误差。

这里关于 x，y 的积分区间都是[-1，1]，这种积分方法精度比较高。为保证工程中大区间内积分的精度，可采用复式求积公式，首先将积分区间分成若干段，而在每段上采用这种配点积分。

对于圆管流量计算，可采用极坐标积分：$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$，将 r 和 q 变换到区间[-1,1]内，再将被积函数 $f(r,\theta)r$ 作曲面高斯积分。如以下积分：

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} r\sin_2\theta\,\mathrm{d}s=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} r\sin_2\theta r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3},$$

对该积分进行坐标变换得到：

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} r\sin_2\theta\,\mathrm{d}s=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\frac{\pi}{2}\left(\frac{\eta+1}{2}\right)_2\sin_2\pi\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

并经过数值积分得到结果为：1.0992，这与精确解误差约为5%；圆管层流速度剖面表达式（无量纲化）为：$u(r)=u_0(1-r^2)$，其流量的精确解为

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} u_0(1-r_2)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\pi u_0/2,$$

利用高斯配点法得到得数值积分计算结果与精确解相同。

4　结论

虽然曲面的双三次样条函数只能使得曲面在整个区间上部分满足二阶微分的连续性，但双三次样条函数构造简单、实用方便，而且光滑性也比较好，可以满足工程应用的需要。虽然曲面的配点积分在配点个数、配点位置以及所能满足的最大代数精度问题上也没有曲线的高斯配点积分法那样有太多规律可循，造成了曲面积分配点求解比较困难，但仍然可以得到一些结果。可以应用到流量计算等工程实际中。

参考文献：

[1]　徐萃薇. 计算方法引论[M]. 北京：高等教育出版社，1985.

[2]　刘德贵，费景高，于泳江，李广元. Fortran 算法汇编[M]. 北京：国防工业出版社，1984.

[3]　周琛，马峥. 基于模糊聚类与高斯－牛顿法的径向基网络设计[J]. 系统仿真学报，2002(7).

Application of Surface-fitting and Surface Numerical Integration on Calculation of Flow

MA Zheng, CHEN Hong-xun

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathmatics and Mechanics, Shanghai 200072，Chima)

Abstract: The calculation of flow is often needed in water conservancy, and surface-fitting and double integration are usually met in order to solve this problem. Spline interpolation and Gaussian quadrature are developed for surface-fitting and double integration and applied to calculation of the flow and the efficiency in pumping station and the flow in aqueduct and pipe. This method can meet the need of engineering.

Key words: Calculation of flow; Surface-fitting; Double integration; Spline interpolation; Gaussian quadrature